سر فصل مطالب:

1) مختصری از جبر تانسوری و علائم اندیسی
2) تحلیل تنش (حالت سه بعدی)
3) مخازن جدار نازک (پوسته ها)- تحلیل الاستیک پلاستیک
4) مخازن جدار ضخیم (استوانه ای - کروی)- تحلیل الاستیک پلاستیک
5) خزش
6) مقدمه از ای تئوری پلاستیته- کاربردهای آن- تحلیل جرمی
7) روابط تنش کرنش در ناحیه پلاستیک
8) آزمایش ها و منحنی های خزش برای تعیین طول عمر قطعات
9) گسیختگی در اثر خزش
10) اشاره ای بر مکانیک شکست

روابط: بطور کلی: مجموعه ای از متغیرهای x_x , ... , x_2 , x_1 را می توان بصورت x_i , i= 1 , .. , n نمایش داد، که در آن i را اندیس متغیر، x_i می نامند که بسته به رنج یا بعدی که برای آن تعریف می شود تغییر می کند، مثلاً در حالت دو بعدی i= 1,2 می باشد.

قانون جمع قراردادی: مطابق این قانون اگر اندیسی در یک جمله با یک ترم یا یک بخش تکرار شود آن جمله به تعداد بعدی که برای آن اندیس مشخص می شود باید با جمله های بعدی جمع شود.

معمولاً بعد اندیس های مورد نظر تا 3 می باشد.

$$\overline{V} = \vec{e}_i v_i = \sum_{i=1}^{3} e_i v_i = \vec{e}_k v_k = \vec{e}_r v_r = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$

بعدی که اندلیس i می تواند داشته باشد مجموع n عدد صحیح از 1 تا n می باشد.

اندیسی را که در یم جمله عمل جمع روی آن انجام می شود اندیس اختیـاری (dummy index) و اندیسی که در یک جمله تکرار نشده باشد را اندیس آزاد (Free index) می نامند.

$$\lambda : TiyB_{kr} = \lambda_1 T_1 jB_{kr} + \lambda_2 T_2 jB_{kr}$$

با توجه به تعریفی که برای اندیس اختیاری گفتیم ملاحظه می کنیم که جای آن را می توان با هر اندیس دیگری عوض کرد. مثلاً $A_i B_i$ را بصورت های $A_n B_n$ یا $A_k B_k$ می توان نوشت.

این عمل شبیه تعویض متغیر در انتگر الگیری است.

$$\int f(x)dx = \int f(t)dt = \int f(y)dy = ...$$

$d_{ii} S_{jk} P_{jkm}$ ➔ اختیاری I و j و k و m اندیس آزاد

در کاربرد علائم اندیسی بکار بردن نکات زیر مهم است:

1- در هر جمله هر اندیس اختیاری حداکثر می تواند یک بار تکرار شود. مثلاً عبارت $A_k B_{nk} C_k$ که در آن k به جز مرتبه مجاز دو، بار دیگر تکرار شده است، غلط می باشد.

2- در یک رابنطه اندیسی، اندیس های آزاد باید در تمامی جملات آن رابطه وجود داشته باشند.

اندیس آزاد km در تمام جملات وجود دارد

$$T_{km} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{km} + 2\mu \varepsilon_{kmj} \quad \rightarrow \quad \surd$$

اندیس های آزاد kmi فقط در یک جمله

$$e_{km} = \frac{1+\lambda}{E} T_{kmi} - \frac{\lambda}{E} T_{jj} \delta_{km} \quad \rightarrow \times$$

وجود دارد پس غلط می باشد.

3- با توجه به تعداد اندیس های آزاد در یک رابطه اندیسی، تعداد آن روابط را مـی تـوان مشـخص کرد.

مثلاً در رابطه $e_{km}=\frac{1+\lambda}{E}T_{km}-\frac{\lambda}{E}Tj_j\ \delta_{km}$ ← m و k اندیس های آزاد- j اندیس اختیاری

تعداد روابط 3^2 می باشد که 3 تعداد بعدهای منظور شده در این درس و 2 تعداد اندیس هـای آزاد این رابطه است.

فرمول تعداد روابط = (تعداد بعدهای منظور شده) (تعداد اندیس های آزاد)

$$K=1\quad T_{1m}-\lambda(\varepsilon_n+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{33})\ \delta_{1m}+2\mu\,\varepsilon_{1m}$$

که چند رابطه آن بصورت زیر است.

$$k=2\qquad T_i=\sigma ij\,nj\qquad ,k=j\ \rightarrow \sigma ij,j\ \ pfi(T_{11}+T_{22}+T_{33})$$

$$K=1\left\langle\begin{matrix} m=1\\ m=2\\ m=3\end{matrix}\right.\qquad \rightarrow e_{13}=\frac{1+\lambda}{E}\,T_{13}-\frac{\lambda}{E}T_{jj}\,\delta_{13}$$

$$K=2\left\langle\begin{matrix} 1\\ 2\\ 3\end{matrix}\right.\qquad \rightarrow e_{23}=\frac{1+\lambda}{E}\,T_{23}-\frac{\lambda}{E}(T_{jj}+T_{22}+T_{33})\delta_{23}$$

دلتای کرونکر:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\delta ij=\begin{cases}0 & i=y\\ 1 & i=j\end{cases}\quad \delta ij$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\left[\vec{a}i+\vec{a}j+\vec{a}k\right]\left[\vec{b}i+\vec{b}j+\vec{b}k\right]\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}\,??????????????$$

جمله بعدی با اندیس آزاد δij عوض شود.

$$\delta_{ij}\,a_i\,,a_j,\quad \delta_{ij}\ a_i k_m=a_j\,k_m\ ,$$

$$K=3\left\langle\begin{matrix} m=1\\ m=2\\ m=3\end{matrix}\right.\qquad \rightarrow e_{33}=\frac{1+\lambda}{E}\,T_{32}-\frac{\lambda}{E}(T_{11}+T_{22}+T_{33})\delta_{32}$$

4) اگر اندیسی در یک بخش تکرار شود، به تعداد بعدی که برای آن اندیس تعریـف مـی شـود، آن جمله باید با جمله های دیگر جمع بسته شود. یعنی اگر اندیس تکراری بـود بـه تعـداد ابعـاد فضـا جمع می شود.

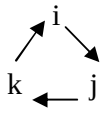
$T_{jj} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

1) اسکالر ← مقدار $\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kl,ij} + \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jk,ik}$ رابطه سازگاری

کمیت ها 2) بردار ← مقدار و جهت

3) تانسور ← مقدار جهت و صفحه اثر

از جمله کمیت های تانسوری می توان به تنش، کرنش، فشار، ممان اینرسی (جرمی و سطحی)، شعاع انحنا اشاره کرد.



$$\begin{cases} 1 & 1,2,3/2,3,1/3,1,2 \\ -1 & 1,3,2/2,1,3/3,2,1 \\ 0 & \end{cases}$$

از جمله کمیت های تانسوری عبارتند از:

1- تانسور دلتای کرونکر δ_{ij} یا تانسور جایگزینی $ai\,\vec{e}i \times bj\,\vec{c}j = ai\,bj\,\varepsilon ijk\,\vec{e}k$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i + j \end{cases} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0 \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

خاصیت جایگزینی δ_{ij}: اگر در یک جمله، δ_{ij} یک اندیس مشترک اختیاری با جمله بعدی همان ترم داشته باشد موجب می شود که اندیس جمله بعدی با اندس آزاد δ_{ij} جایگزین شود.

$$\delta_{ij}\, a_i = a_j \qquad , \qquad \delta_{ij}\, a_{ikm} = a_{jkm}$$

ضرب داخلی بردارهای یکه را با استفاده از تعریف δ_{ij} بصورت زیر می توان نمایش داد:

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} \vec{e}_1 . \vec{e}_1 = 1 \\ \vec{e}_1 . \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{e}_1 . \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

2- تانسور متناوب ε_{ijk}

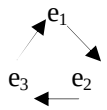
$$\varepsilon i_{jk} = \begin{cases} 1 & 123, 231, 312 \\ -1 & 213, 321, 132 \\ 0 & 112, 122, 133 \end{cases}$$

اگر اندیس تکراری باشد

با استفاده از تعریف تانسور متناوب ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نمایش می دهند:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon i_{jk}\, \vec{e}_k$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{12k}\, \vec{e}_k = \varepsilon_{121}\, \vec{e}_1 + \varepsilon_{122} \vec{e}_2 + \varepsilon_{123}\, \vec{e}_3 = e_3$$



$$\rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

عملگرهای برداری:

تعاریف زیر مربوط به سیستم مختصات کارتزین می باشد ولی به آسانی می توان آنها را در دستگاههای مختصات دیگر بیان کرد:

1) عملگر یا اوپراتور دل «∇» Del operator

دقت شود یک سیگما می باشد. $\vec{\nabla} = \vec{e}_i \dfrac{\partial}{\partial xi}$

از عمل کردن عملگر $\vec{\nabla}$ در $F = F(x_i) = F(x_1, x_2, x_3)$ گرادیان تابع F بدست می آید.

$$grad\, F = \vec{\nabla} F = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(F) = \vec{e}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = \vec{e}_i\, F_{xi}$$

عملگر دل یک مرتبه تانسور را بالا می برد.

دیورژانس: از ضرب داخلی کردن عملگر ∇ در تابع بردار $\vec{A} = \vec{A}(x_i)$ به دیورژانس بردار $\vec{A}$ می رسیم.

$$div\,\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}$$

$$div\,\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\left(\vec{e}_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right).\left(A_j\,\vec{e}_j\right)=\delta_{ij}\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i}=\frac{\partial A_j}{\partial x_j}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=A_{j,j}=A_{i,i}$$

کرل: از حاصلضرب خارجی عملگر $\vec{\nabla}$ در بردار $\vec{A}$: $\vec{A}$ curl بدست می آید.

$$curl\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$curl\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{e}_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\times(A_j.\vec{e}_j)=(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i}=\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$=\vec{e}_k\,\varepsilon_{ij}\times A_{j,i}\qquad\Rightarrow curl\,\vec{A}=\vec{e}_k\,\varepsilon i_{jk}\,A_{j,i}$$

یعنی لاپلاسین یک تابع اسکالر عبارتست از دیورژاس گرادیان تابع اسکالر.

اگر گرادیان تابع اسکالر φ را با A نشان دهیم، دیوژانس بردار A را لالاسین φ می نـامیم. منظـور بدست آوردن دیورژانس گرادیان تابع اسکالر φ.

$$\vec{A}=\vec{\nabla}\varphi$$

$$div\,\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\varphi)=\vec{\nabla}^2\,\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\varphi_{,ii}$$

$$\rightarrow div\,\vec{A}=\varphi_{,ii}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi=e_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}.\left(e_j.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=(e_i\;e_j)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}=\varphi_{,ii}=\varphi_{,jj}$$

مثال اگر A و B و C سه بردار باشند، حاصل عبارت زیر را بصورت اندیسی نمایش دهید؟

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C}=\left(A_i\vec{e}_i\times B_j.\vec{e}_j\right).c_k\,\vec{e}_k=\left(\varepsilon_{ijr}\,\vec{e}_r\,A_i\,B_j\right).c_k\,\vec{e}_k$$

$$=\varepsilon_{ijr}\,A_i\,B_j\,C_k\,\left(\vec{e}_r.\vec{e}_k\right)=\varepsilon i_{jr}\,\delta_{rk}\,A_i\,B_j\,C_k=\varepsilon_{ijk}\,A_i\,B_j\,C_k$$

تمرین) با استفاده از روابط اندیسی ثابت کنید:

الف)

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$$

$$\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\vec{e}_jA_j\right)=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.\left(\vec{e}_i\times\vec{e}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.\left(\vec{e}_{ijk}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$$

$$=\vec{e}_i.\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)=\delta_{ik}\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{kjk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)=0$$

ب)

$$\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

ج)

$$\delta_{ij}\,\delta_{ij}=3 \qquad :\delta_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\delta_{ij}\,\delta_{ij}=\delta_{jj}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3$$

$$\delta_{ij}\,\delta_{ij}=\delta_{jj}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3$$

د)

$$\varepsilon_{ijk}\;\varepsilon_{njk}=2\delta_{in}$$

ن)

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kji}=-6$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kji}=\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kji}+\varepsilon_{2jk}\,\varepsilon_{kj2}+\varepsilon_{3jk}\,\varepsilon_{kj3}=\varepsilon_{11k}\,\varepsilon_{k11}+\varepsilon_{12k}\,\varepsilon_{k21}+\varepsilon_{13k}\,\varepsilon_{k31}+\varepsilon_{21k}\,\varepsilon_{k12}$$

$$\varepsilon_{22k}\,\varepsilon_{k22}+\varepsilon_{23k}\,\varepsilon_{k32}+\varepsilon_{31k}\,\varepsilon_{k13}+\varepsilon_{32k}\,\varepsilon_{k23}+\varepsilon_{33k}\,\varepsilon_{k33}=\varepsilon_{121}\,\varepsilon_{121}+\varepsilon_{122}\,\varepsilon_{221}$$

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{321}+\varepsilon_{131}\,\varepsilon_{131}+\varepsilon_{132}\,\varepsilon_{231}+\varepsilon_{133}\,\varepsilon_{331}+\varepsilon_{211}\,\varepsilon_{112}+\varepsilon_{212}\,\varepsilon_{212}+\varepsilon_{213}\,\varepsilon_{312}+\varepsilon_{231}\,\varepsilon_{132}$$

$$\varepsilon_{232}\,\varepsilon_{232}+\varepsilon_{233}\,\varepsilon_{332}+\varepsilon_{311}\,\varepsilon_{113}+\varepsilon_{312}\,\varepsilon_{213}+\varepsilon_{313}\,\varepsilon_{313}+\varepsilon_{321}\,\varepsilon_{123}+\varepsilon_{322}\,\varepsilon_{223}$$

$$\varepsilon_{323}\,\varepsilon_{323}=\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{321}+\varepsilon_{132}\,\varepsilon_{231}+\varepsilon_{213}\,\varepsilon_{312}+\varepsilon_{231}\,\varepsilon_{132}+\varepsilon_{312}\,\varepsilon_{213}+\varepsilon_{321}\,\varepsilon_{113}$$

$$\Rightarrow\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kji}=\underset{-1}{(1)(-1)}+\underset{-1}{(-1)(1)}+\underset{-1}{(-1)(+1)}+\underset{-1}{(1)(-1)}+\underset{-1}{(1)(-1)}+\underset{-1}{(-1)(1)}=-6$$

و)

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A})=\frac{1}{2}\left[(\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{A}+\varphi\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]$$

$$\rightarrow\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A})=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times(\varphi\vec{e}_j\,A_j)=(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$=\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\frac{1}{2}\left[(\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{A}+\varphi\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)\times\vec{e}_jA_j+\varphi\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\vec{e}_jA_j\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}+\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(\vec{e}_i\times e_j)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}+\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\right]-\frac{1}{2}\left[2\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right]$$

$$=\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varphi\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

هـ)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=2$$

رابطه زیر را بصورت اندیسی نمایش دهید؟

$$n_1^2+n_2^2+n_{3x}^2+....+n_n^2=2$$

$$x_ix_i$$

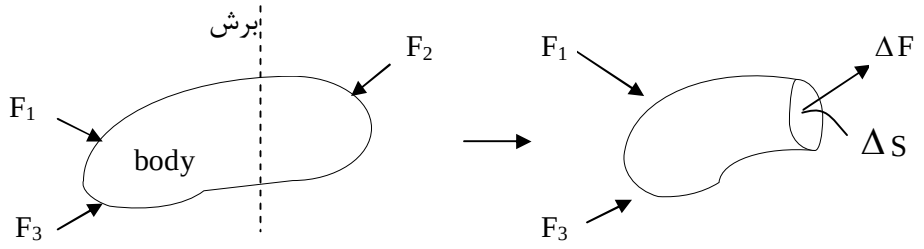
مقدمه:

نیروهایی که به یک جسم اثر می کنند را می توان به دو گروه نیروهای خارجی و داخلی تقسیم بندی کرد، بطور مثال نیرویی را که در آزمایش کشش بوسیله یک دستگاه به یک نمونه وارد می شود جزء نیروهای خارجی و نیروهایی که در لایه های مختلف این جسم برای مقابله با گسیختگی لایه ها از یکدیگر بوجود می آید جزء نیروهای داخلی می باشد. بدیهی است که با قطع کردن هر قسمت دلخواه از جسم نیروهای داخلی در سطح مقطع تبدیل به نیروهای خارجی برای قسمت جدا شده می شود.

نیروهای خارجی در حالت کلی به دو گروه تقسیم بندی می شوند یکی نیروهایی که جرمی یا حجمی اند و بر جسم اثر می کنند و بر حسب نیرو بر واحد حجم اندازه گیری می شوند مانند نیروی جاذبه زمین (وزن)، نیروی الکترومغناطیسی و نیروی اینرسی و دسته دیگر که به سطح خارجی جسم اثر می کنند مانند اجسام مجاور که بر حسب نیرو بر واحد سطح سنجیده می شوند.

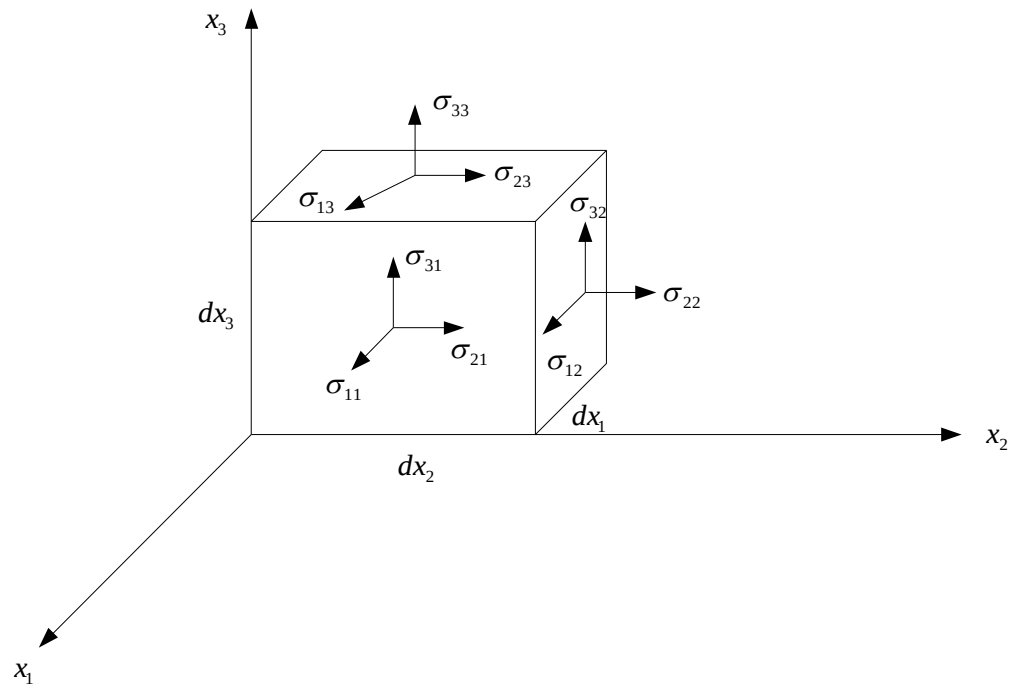
بنا به تعریف نیروهای دسته اول را نیروهای حجمی (body force) و نیروهای دسته دوم را نیروهای سطحی (surface force) می نامند.

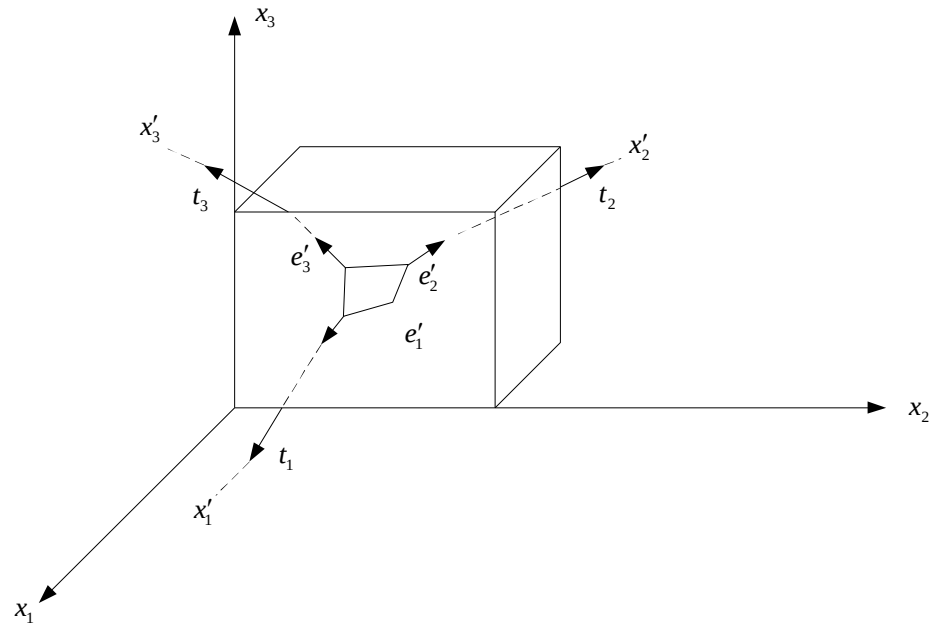
تعریف: اثرات خارجی که به یک جسم وارد می شود در هر نقطه از آن جسم نیروهای داخلی ایجاد می کند که طبق تعریف شدت آن ها را مؤلفه های تنش در آن نقطه می گویند.



$$t = Li\frac{\Delta F}{\Delta S}$$
$$\Delta S \to 0$$

$\underline{t}$ را بردار کششی سطحی یا تنش در آن نقطه می گویند که بـرای توضـیح بیشـتر در مـورد آن بـه شکلهای زیر باید دقت نمود. مؤلفه های $\underline{t}$ در شکل زیر نشان داده شده است.





محورهای x_1' و x_2' و x_3' متعامرند. در یک نقطه تانسور t را با سه مؤلفه t_1 و t_2 وt_3 نشان می دهـیم که خود آنها از سه مؤلفه دیگر بیان می شوند.

t_i ها را مؤلفه های t می گویند که خودشان بر یکدیگر عمودند، ولی بر صفحات اثرشان الزاماً عمـود نیست.

δ_{ij} مؤلفه های t_i هستند (در جهت محورهای مختصات)

روی هر صفحه از مکعب δ_{ij} ها بر یکدیگر عمودند.

قرارداد: اندیس اول در δ_{ij} نشان دهنده جهت مؤلفه تنش و اندیس دوم نشان دهنده بردار عمـود بر صفحه ای است که δ_{ij} بر آن اثر می کند.

بعداً ثابت می کنیم که تانسور تنش متقارن است یعنی قرارداد فوق را برعکس نیز مـی تـوان بیـان کرد.

$$t\begin{cases}\vec{e}_1' \to t_1 \begin{cases}\vec{e}_1' \to \sigma_{11}\\ \vec{e}_2' \to \sigma_{12}\\ \vec{e}_3' \to \sigma_{13}\end{cases}\\ \vec{e}_2' \to t_2 \begin{cases}\vec{e}_1' \to \sigma_{21}\\ \vec{e}_2' \to \sigma_{22}\\ \vec{e}_3' \to \sigma_{23}\end{cases}\\ \vec{e}_3' \to t_3 \begin{cases}\vec{e}_1' \to \sigma_{31}\\ \vec{e}_2' \to \sigma_{32}\\ \vec{e}_3' \to \sigma_{33}\end{cases}\end{cases}$$

توجه) تنش های با اندیس های مساوی را تنش های نرمال و تنش های با اندیس هـای مختلـف را تنش های برشی می نامند.

تانسور کلی تنش در نقطه مورد نظر برای المان شکل فوق بصورت زیر نوشته می شود:

$$t = t_1 e_1' + t_2 e_2' + t_3 e_3'$$

ارتباط بین مؤلفه های t_i با مؤلفه های خودشان بصورت زیر است:

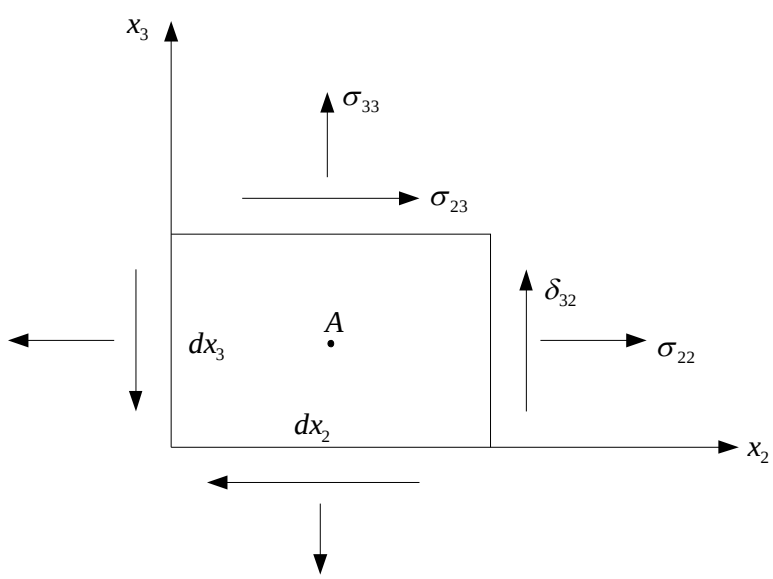
$$t_1 = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$
$$t_2 = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$
$$t_3 = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

روابط فوق معادله تعادل نیستند در حقیقت روابط تجزیه t_i با مؤلفه هایشان است. که در آینده این روابط را اثبات خواهیم کرد. شکل اندیسی روابط فوق به شکل زیر است که به رابطه کوشی موسوم است.

$$t_i = \sigma_{ij}\vec{e}_j = \sigma_{ij}\vec{e}_j$$

در این قسمت نشان می دهیم از 9 مؤلفه تنش فقط 6 تای آنها مستقل از یکدیگرند. برای این منظور صفحه x_2 و x_3 را از مکعب فوق در نظر بگیرید.

در واقع در حالت ساده دو بعدی نشان داده می شود تانسور تنش متقارن است.



طول اضلاع معکب را dx_1 و dx_2 و dx_3 فرض می کنیم.

$$\sum M_A = 0$$

$$2\sigma_{32}(dx_3\, dx_1)\left(\frac{dx_2}{2}\right) - 2\sigma_{23}(dx_2\, dx_1)\left(\frac{dx_3}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

به طریق مشابه می توان نتیجه گرفت:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \ , \ \sigma_{13} = \sigma_{31}$$

تمرین) در حالت سه بعدی ثابت کنید تانسور تنش متقارن است؟

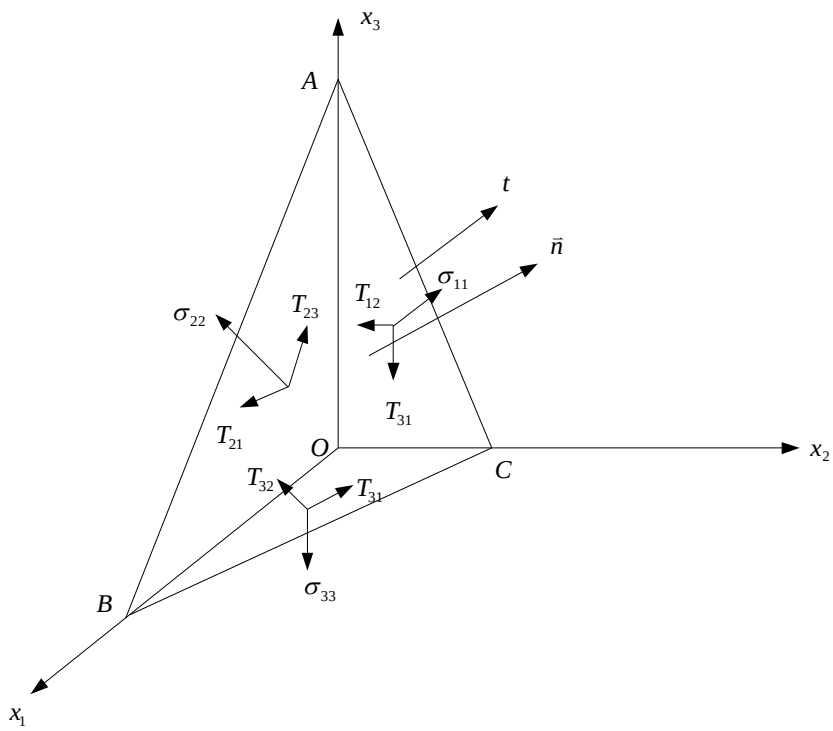
توجه)

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = T_{23} = T_{32}$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = T_{12} = T_{21}$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = T_{13} = T_{31}$$

و این به این مفهوم است که تانسور تنش یک تانسور متقارن است و در حالت معمول این تانسور را به حالت زیر نشان می دهیم:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & \sigma_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

حال برای تشریح بیشتری مطالب فوق و اثبات روابط کوشی المان هرمی شکل از نقطه مـورد نظـر در جسم مطابق شکل زیر در نظر می گیریم:



ds: ساعت صفحه ABC

$\vec{n}$: بردار عمود بر صفحه ABC

t : بردار تنش مؤثر بر صفحه

$$\sum f_n = 0 \qquad p_n = \sigma_n Snm + Tym\, sny + Tzm\, snz$$
$$\sum f_y = 0 \qquad p_y = \sigma_y Sny + Tmy\, snu + Tzy\, snz$$
$$\sum f_z = 0 \qquad p_z = \sigma_z Snz + Tmz\, snx + Tyz\, sny$$
$$t = p/s \qquad ti = \sigma_{ij} n_j \qquad , \sigma_{ij} = 1/3\sigma_{mn}\, \sigma_{ij} + A_{ij}$$

ds_1 : مساحت AOC

ds_2 : مساحت AOB

ds_3 : مساحت BOC

n_1 و n_2 و n_3 مؤلفه های بردار $\vec{n}$ می باشد که در امتداد محورهای x_1 و x_2 و x_3 بوده و بر صـفحات AOC و BOA و BOC عمودند.

Δ AOC : $ds_1 = n_1 ds$

Δ BOA : $ds_2 = n_2 ds$

Δ BOC : $ds_3 = n_3 ds$

در حالت کلی: $t = t_1\bar{e}_1 + t_2\bar{e}_2 + t_3\bar{e}_3$

مقدار نیرو در جهات محورهای مختصات برابر است با:

$t_1 ds_1$	$t_2 ds_2$	$t_3 ds_3$
در جهت x_1	در جهت x_2	در جهت x_3
$t_1 n_1 ds$	$t_2 n_2 ds$	$t_3 n_3 ds$

$$t_1 ds - \sigma_{11} ds_1 - \sigma_{21} ds_2 - \sigma_{31} ds_3 = 0$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت x_1 : $t_1 ds = \sigma_{11} n_1 ds + \sigma_{21} n_2 ds + \sigma_{31} n_3 ds$

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \qquad 1$$

به طریق مشابه با نوشتن معادله تعادل در جهات x_2 و x_3 :

$$t_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \qquad 2$$

$$t_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \qquad 3$$

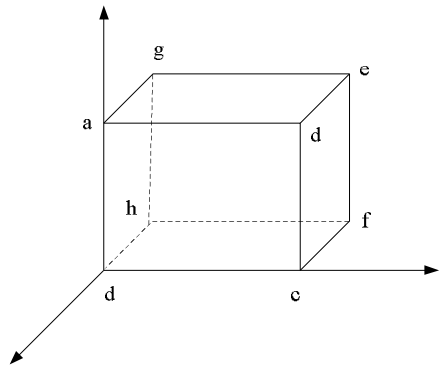
شکل اندیسی سه رابطه فوق رابطه کوشی می باشد.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \ , \ i, j = 1,2,3$$

بدین ترتیب با داشتن مؤلفه های تنش در یک نقطه می توان جهت و اندازه بردار تنش را روی هر صفحه گذرنده از آن نقطه (با مشخص بودن بردار عمود بر آن سطح) تعیین کرد.

به عنوان مثال صفحات abcd و befc و bcfc صفحات مثبت اند و صفحات hfcd و ahgd و gefh صفحات منفی هستند.

مؤلفه های تنش بصورتی نشان داده شده اند که حاصلضربشان در صفحات متناظرشان (صفحه اثرشان) مثبت باشد.



مثال) تانسور تنش زیر در نقطه ای از یک حجم مفروض است، مطلوبست جهت و مقدار بردار تنش روی صفحه ای با معادله ی $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ که از آن نقطه می گذرد؟

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

گرادیان: بردار عمود بر سطح است:

$$\vec{n} = \frac{\nabla \vec{f}}{|\nabla f|} \qquad f : 2n_1 - 2n_2 - n_3 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{3} = 2/3\vec{i} - 2/3_j - 1/3\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 - 4/3 - 1 \\ 4/3 - 1/3 - 2 \\ 2 \quad - 4 - 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = -5/3\vec{i} - 10/3\vec{j} - 7/3\vec{k}$$

تمرین) رابطه زیر را بسط دهید؟

$$curl\vec{A}=A_{j,i}\vec{e}_k\ \varepsilon_{ijk} \qquad i=1\begin{cases} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{cases} \quad i=2\begin{cases} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{cases} \quad i=3\begin{cases} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{cases}$$

$$\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}A_{j,i}=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\frac{\delta A_j}{\delta x_i}=\vec{e}_k\varepsilon_{1jk}\frac{\delta A_j}{\delta x_1}+\vec{e}_k\varepsilon_{2jk}\frac{\delta A_j}{\delta x_2}+\vec{e}_k\varepsilon_{3jk}\frac{\delta A_j}{\delta x_3}$$

$$=\vec{e}_k\varepsilon_{11k}\frac{\delta A_1}{\delta x_1}+\vec{e}_k\varepsilon_{12k}\frac{\delta A_2}{\delta x_1}+\vec{e}_k\varepsilon_{13k}\frac{\delta A_3}{\delta x_1}+\vec{e}_k\varepsilon_{21k}\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\vec{e}_k\varepsilon_{22k}\frac{\delta A_2}{\delta x_2}$$

$$+\vec{e}_k\varepsilon_{23k}\frac{\delta A_2}{\delta x_2}+\vec{e}_k\varepsilon_{31k}\frac{\delta A_1}{\delta x_3}+\vec{e}_k\varepsilon_{32k}\frac{\delta A_2}{\delta x_2}+\vec{e}_k\varepsilon_{33k}\frac{\delta A_3}{\delta x_3}$$

$$=\vec{e}_1\varepsilon_{121}\frac{\delta A_2}{\delta x_1}+\vec{e}_2\varepsilon_{122}\frac{\delta A_2}{\delta x_1}+\vec{e}_3\varepsilon_{123}\frac{\delta A_2}{\delta x_1}+\vec{e}_1\varepsilon_{131}\frac{\delta A_3}{\delta x_2}+\vec{e}_2\varepsilon_{132}\frac{\delta A_3}{\delta x_1}$$

$$+\vec{e}_3\varepsilon_{133}\frac{\delta A_3}{\delta x_1}+\vec{e}_1\varepsilon_{211}\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\vec{e}_2\varepsilon_{212}\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\vec{e}_3\varepsilon_{213}\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\vec{e}_1\varepsilon_{231}\frac{\delta A_3}{\delta x_2}$$

$$+\vec{e}_2\varepsilon_{232}\frac{\delta A_3}{\delta x_2}+\vec{e}_3\varepsilon_{233}\frac{\delta A_3}{\delta x_2}+\vec{e}_1\varepsilon_{311}\frac{\delta A_1}{\delta x_3}+\vec{e}_2\varepsilon_{312}\frac{\delta A_1}{\delta x_3}+\vec{e}_3\varepsilon_{313}\frac{\delta A_1}{\delta x_3}$$

$$+\vec{e}_1\varepsilon_{321}\frac{\delta A_2}{\delta x_3}+\vec{e}_2\varepsilon_{322}\frac{\delta A_2}{\delta x_3}+\vec{e}_3\varepsilon_{323}\frac{\delta A_2}{\delta x_3}$$

$$=\vec{e}_3\frac{\delta A_2}{\delta x_1}-\vec{e}_2\frac{\delta A_3}{\delta x_1}-\vec{e}_3\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\vec{e}_1\frac{\delta A_3}{\delta x_2}+\vec{e}_2\frac{\delta A_1}{\delta x_3}+\vec{e}_1\frac{\delta A_2}{\delta x_3}$$

$$=\left(-\frac{\delta A_2}{\delta x_3}+\frac{\delta A_3}{\delta x_2}\right)\vec{e}_1+\left(-\frac{\delta A_3}{\delta x_1}+\frac{\delta A_1}{\delta x_3}\right)\vec{e}_2+\left(-\frac{\delta A_1}{\delta x_2}+\frac{\delta A_2}{\delta x_1}\right)\vec{e}_3$$

بدست آوردن تنشهای اصلی روی صفحه ABC

$$\gamma_n=t_n\,n_m+tyny+tznz$$

$$\sigma_n=\sigma_n\,n_m{}^2+\tau t_n\,n_n n_y+\theta z_n\,n_z\,n_n+\sigma_y n_y^2+\tau m_y n_m n_y+\tau z_y n_z n_y$$

$$+\tau m_z n_n n_z+\tau y_z n_y n_z+\sigma_z n_z^2\Rightarrow\sigma_n=\sigma_n n_n^2+\sigma_y n_y^2+\sigma_z n_z^2+2\,\tau m_y n_m n_y+(\tau y_z n_y n_z$$

$$+\tau z_x n_3 n_m)$$

$$\begin{cases}\sigma_n.n_x=t_x=\sigma_x n_m+t_y n\,n_y+\tau z_x n_z \\ \sigma_n.n_y=t_y=tm_y n_x+\sigma_y n_y+\tau z_y n_z \\ \sigma_n.n_z=t_z=\tau m_z n_x+\tau y_z\,n_y+\sigma z_n n_z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\sigma_x-\sigma_x)\,n_m+\tau y_x n_y+\tau z_n n_3 \\ \tau_x y_x\,(\sigma_y-\sigma_x)\,n_y+\tau_{34}n_3\end{cases}$$

تمرین) رابطه زیر را بسط دهید و راجع به دو جزء آن توضیح دهید؟

$$\sigma_{ij} = p\partial_{ij} + A_{ij} \qquad , \quad p = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

حالت تنش در هر نقطه بوسیله تانسور تنش σ_{ij} بیان می گردد. این تانسو قابل تجزیه به دو بخش می باشد. بخش هیدرواستاتیک (کسروی) و بخش انحرافی تنش که آن را تانسور تنش برشی می نامند. که تجزیه تانسور تنش بصورت زیر انجام می شود.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + A_{ij}$$

تنش هیدرواستاتیک تنش انحرافی

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij} + A_{ij}$$

$$i=1 \begin{cases} j=1 \rightarrow \delta_{11} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{11} + A_{11} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + A_{11} \\ \qquad \Rightarrow A_{11} = \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ j=2 \rightarrow \sigma_{12} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{12} + A_{12} \Rightarrow A_{12} = \sigma_{12} \\ j=3 \rightarrow \sigma_{13} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{13} + A_{13} \Rightarrow A_{13} = \sigma_{13} \end{cases}$$

$$i=2 \begin{cases} j=1 \rightarrow \sigma_{21} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{21} + A_{21} \Rightarrow A_{21} = \sigma_{21} \\ j=2 \rightarrow \sigma_{22} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{22} + A_{22} \\ \qquad \Rightarrow A_{22} = \sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ j=3 \rightarrow \sigma_{23} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{23} + A_{23} \Rightarrow A_{23} = \sigma_{23} \end{cases}$$

$$
i=3\begin{cases}
j=1\rightarrow\sigma_{31}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\sigma_{31}+A_{31}\Rightarrow A_{31}=\sigma_{31}\\
j=2\rightarrow\sigma_{32}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\sigma_{32}+A_{32}\Rightarrow A_{32}=\sigma_{32}\\
j=3\rightarrow\sigma_{33}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\sigma_{33}+A_{33}\\
\qquad\Rightarrow A_{33}=\sigma_{33}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})
\end{cases}
$$

پس:

$$
\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}
$$

$$
\frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\end{pmatrix}
$$

تانسور فوق تنش هیدرواستاتیک σ_{ij} است.

$$
A_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\end{pmatrix}
$$

تانسور فوق بخش تانسور تنش انحرافی σ_{ij} است.

تمرین) رابطه زیر را بسط دهید؟

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \sigma_{ij}\, e_{kk}$$
$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \lambda = \frac{VE}{(1+v)(1-2v)}$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}$$
$$e_{kk} = (e_{11} + e_{22} + e_{33})$$

$3^2=9$ رابطه وجود دارد.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \vec{e}_{ij} + \lambda \gamma_{ij} (\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33})$$

$$i=1 \begin{cases} j=1 \rightarrow \sigma_{11} = 2\mu \vec{e}_{11} + \lambda(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \\ j=2 \rightarrow \sigma_{12} = 2\mu \vec{e}_{12} + \lambda \gamma_{12}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{12} = 2\mu \vec{e}_{12} \\ j=3 \rightarrow \sigma_{13} = 2\mu \vec{e}_{13} + \lambda \gamma_{13}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{13} = 2\mu \vec{e}_{13} \end{cases}$$

$$i=2 \begin{cases} j=1 \rightarrow \sigma_{21} = 2\mu \vec{e}_{21} + \lambda \gamma_{21}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{21} = 2\mu \vec{e}_{21} \\ j=2 \rightarrow \sigma_{22} = 2\mu \vec{e}_{22} + \lambda(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \\ j=3 \rightarrow \sigma_{23} = 2\mu \vec{e}_{23} + \lambda \gamma_{23}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{23} = 2\mu \vec{e}_{23} \end{cases}$$

$$i=31 \begin{cases} j=1 \rightarrow \sigma_{31} = 2\mu \vec{e}_{31} + \lambda \gamma_{31}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{31} = 2\mu \vec{e}_{31} \\ j=2 \rightarrow \sigma_{32} = 2\mu \vec{e}_{32} + \lambda \gamma_{32}(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \rightarrow \sigma_{32} = 2\mu \vec{e}_{32} \\ j=3 \rightarrow \sigma_{33} = 2\mu \vec{e}_{33} + \lambda(\vec{e}_{11} + \vec{e}_{22} + \vec{e}_{33}) \end{cases}$$

تمرین) تانسور تنش در یک محیط پیوسته به صورت زیر داده شده است. بردار تنش را در نقطه ای به مختصات $x_i(1,2,3)$ در روی $x_1+x_2+x_3=6$ صفحه حساب نمایید؟

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & bx_2 = b \times 2 = 2b \\ 0 & a & cx_1 = c \times 1 = c \\ bx_2 = b \times 2 = 2b & cx_1 = c \times 1 = c & a \end{pmatrix}$$
$$x_i = (x_1, x_2, x_3) = (1,2,3)$$

در تانسور σ_{ij}، مقدار c,b,a ثابت می باشد.

x_i تانسور در $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2b \\ 0 & a & c \\ 2b & c & a \end{pmatrix}$

رابطه کوشی $t_i = \sigma_{ij}\, n_j$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2b \\ 0 & a & c \\ 2b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

بردار عمود بر صفحه $\vec{n} = \dfrac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} \quad , \quad f : x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2b \\ 0 & a & c \\ 2b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{3}}{3} b \\ \frac{\sqrt{3}}{3} c \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} b + \frac{\sqrt{3}}{3} c + \frac{\sqrt{3}}{3} a \end{pmatrix}$$

بردار تنش در نقطه x_i صفحه مورد نظر $t = 2\frac{\sqrt{3}}{3} b\vec{n}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} c\vec{n}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(2b + c + a)\vec{n}_3$

تمرین) تانسورتنش در یک محیط پیوسته به صورت زیر داده شده است. در نقطه ای به مختصات $x_i(1,1,1)$ تنش های اصلی و ماکزیمم تنش برشی را بدست آورید.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_3 & 0 \\ 2x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_i = (1,1,1) \qquad \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 2 & 0 \\ 2 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow -\sigma(\sigma^2 - 0) - 2(-2\sigma - 0) + 0(0-0) = 0$$

$$-\sigma^3 + 4\sigma = 0$$

$$\sigma(-\sigma^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 2 \\ \sigma_3 = -2 \end{cases}$$ تنش های اصلی

تنش برشی max $$\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \pm\frac{1}{2}(2+2) = \pm 2$$

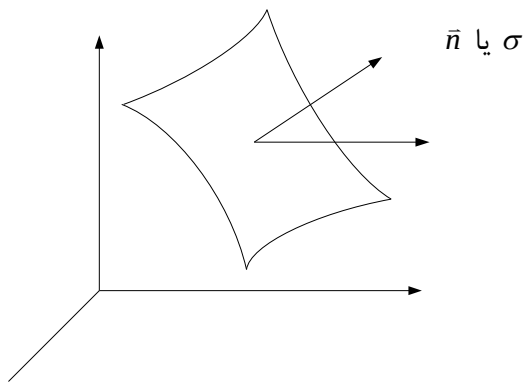
تنش برشی min

$$\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm\frac{1}{2}(0+2) = \pm 1$$

$$\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm\frac{1}{2}(0-2) = \pm 1$$

تنش های اصلی:

در حالت کلی بردار تنش و بردار نرمال بر سطح در یک امتداد نیستند (همانند مثال قبل) در حالت خاصی که بردار نرمال بر سطح و بردار تنش بر روی هم منطبق می شوند آن را δ می نماییم. در شکل فرض می کنیم σ و n بر هم منطبق بوده و می خواهیم مؤلفه های T و n را بدست آوریم. حال چنانچه n_3, n_2, n_1 مؤلفه های بردار عمود بر سطح باشند، می توانیم داشته باشیم:



مؤلفه های σ که در امتداد n می باشند بر حسب مؤلفه های n بیان می شوند:

$$T_1 = n_1\sigma$$
$$T_2 = n_2\sigma$$
$$T_3 = n_3\sigma$$

چون فرض شده مؤلفه های تنش در امتداد بردار $\vec{n}$ هستند.

روابط فوق به شکل اندیسی بصورت زیر نوشته می شوند:

$$T_i = \sigma n_i \qquad i = 1,2,3$$

با توجه به رابطه کوشی $T_i = \sigma_{ij}\, n_j = \sigma_{ij}\, n_j$

از روابط فوق $\sigma_{ij}\, n_j = \sigma\ \ n_i$

از خاصیت دلتای کرونکر داریم : $n_i = \gamma_{ij}\, n_j$

$$\rightarrow\ \sigma_{ij}\, n_j = \sigma\, \gamma_{ij}\, n_j$$
$$n_j\,(\sigma_{ij} - \sigma\ \gamma_{ij}) = 0$$

رابطه فوق در واقع یک دستگاه سه معادله سه مجهول است که شرط وجود جواب غیـر صـفر بـرای آن این است که دترمینان ضرایب آن صفر باشد یعنی:

$$\left|\sigma_{ij} - \sigma\gamma_{ij}\right| = 0 \qquad \sigma_{ij} - \sigma\gamma_{ij} = (\sigma_{ij}) - \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{32}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

هر ترمینال فوق منجر به یک معادله درجه 3 می شود که از حل آن مقادیر اصلی $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ بدست می آید.

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

که در آن داریم:

$$I_1 = \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}]$$

ضرایب I_i را تغییر ناپذیرهای تانسور تنشی می گویند.

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = cte \\ \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

پس از محاسبه مقادیر تنش های اصلی باید جهات متناظر با هر یک از آنها را بدست آورد، برای این کار با استفاده از رابطه $n_j(\sigma_{ij} - \sigma\gamma_{ij})$ و رابطه $n_1^2 + n_2^2 + n_2^2 = 1$ بایستی جهات اصلی متناظر با هر یک را بدست آوریم.

در واقع برای بدست آوردن جهت متناظر با تنش σ_1 باید در رابطه $n_j(\sigma_{ij} - \sigma\gamma_{ij}) = 0$ بجای σمقدار σ_1 را قرار دهیم، در نتیجه این کار به یک معادله دستگاه سه معادله سه مجهول می رسیم.

که فقط دو معادله آن مستقل از یکدیگرند و سپس با استفاده از رابطه ی $n_1^2 + n_2^2 + n_2^2 = 1$ باید سه مجهول مسئله (n_1, n_2, n_3) را بدست آورد.

اگر با استفاده از عملیات ریاضی، تانسور تنش را بصورت قطری بنویسیم، عناصر روی قطر اصلی آن نشان دهنده تنشهای اصلی می باشند.

اول قطر اصلی را منهای σ کرده، سپس دترمینال را مساوری صفر گذاشته معادلـه را حـل کـرده، سه مقدار برای σ بدست آورده (مقادیر حقیقی) این مقادیر را در رابطـه $n_j(\sigma_{ij}-\sigma\gamma_{ij})=0$ قـرار داده، یک دستگاه بوجود آید و سپس به کمک معادله کمکی دستگاه را حل می کنیم.

مثال) برای تانسور تنش زیر، تنش های اصلی و جهات متناظر آن ها را بدست آورید؟

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\sigma & 2 & 3\\ 2 & 4-\delta & 6\\ 3 & 6 & 1-\sigma\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\sigma)[(4-\sigma)(1-\sigma)-36]-2[2(1-18]+3[12-3(4-\sigma)]=0$$

$$(1-\sigma)(4-4\sigma-\sigma+\sigma^2-36)-2(2-2\delta-18)+3(12-12+35)=0$$

$$\sigma^2-\sigma\sigma-32-\sigma^3+\sigma\sigma^2+32\sigma+4\sigma+32+9\sigma=0$$

$$-\sigma^3+6\sigma^2+40\sigma=0$$

$$-\sigma(\sigma^2-6\sigma-40)=0 \qquad \rightarrow -\sigma=0$$

$$-\sigma^2-6\sigma-40=0$$

$$(\sigma-10)(\sigma+4)=0$$

$$\sigma=10$$

$$\sigma=-4$$

روش حل معادله درجه 3: روش نیوتن $f(x)=0$

x_0 حدس اولیه

تا جایی که $x_n \approx x_{n+1}$ شود.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\sigma_{i+1}=\sigma_i-\frac{\sigma_i^{\,3}-I_1\sigma_i^{\,2}+I_2\sigma_i-I_3}{?} \qquad \sigma_i M=\sigma_i-\frac{f(\sigma_i)}{f'(\sigma_i)}$$

در روش نیوتن برای حدس اولیه دقیق تر، می توان نمودار $n^3=A$ که A مابقی معادله است را رسم کرده و با استفاده از جواب حدودی، حدس دقیق تری زد تا زودتر به جواب برسیم.

نکته) چون تانسور تنش متقارن است، همواره مقدار بدست آمده برای σ حقیقی است.

روش سریعتر حل معادله درجه 3:

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

$$Q=\frac{3a_2-a_1^2}{9} \quad , \quad R=\frac{9a_1a_2-27a_3-2a_1^3}{54}$$

$$3=\sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}} \quad , \quad T=\sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^3}}$$

$$\begin{cases} x_1=s+T-\frac{1}{3}\alpha_1 \\ x_2=-\frac{1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T) \\ x_3=-\frac{1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}\alpha_1-i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T) \end{cases}$$

اگر $a_1,a_2,a_3\in R \quad , \quad D=Q^3+R^2$

اگر $D>0$ یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلف دارد

اگر $D=0$ همه ریشه ها حقیقی و حداقل دو ریشه مساوی

اگر $D<0$ ریشه ها حقیقی و نابرابر

اگر $D<0$

$$\begin{cases} x_1=2\sqrt{-Q}\ \cos\theta/3-\frac{a_1}{3} \\ x_2=2\sqrt{-Q}\cos(120+\frac{\theta}{3})-\frac{a_1}{3} \\ x_3=2\sqrt{-Q}\cos(240^\circ+\frac{\theta}{3})-\frac{a_1}{3} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$$

رابطه بین ریشه ها $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a_1 \\ x_1\, x_2\, x_3 = -a_3 \\ x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 = a_2 \end{cases}$

اگر جمع ضریب صفر شد یکی از جوابها 1 است و رابطه را بر x-1 تقسیم می کنیم.

ادامه حل مسئله:

برای بدست آوردن جهت اصلی متناظر با تنش اصلی $\sigma_1 = 10$ می نویسیم:

$$[\sigma_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}][n_i] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sigma_1 & 2 & 3 \\ 2 & 4-\sigma_1 & 6 \\ 3 & 6 & 1-\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ 2n_1 - 6n_2 + 6n_3 = 0 \\ 3n_1 + 6n_2 - 9n_3 = 0 \end{cases}$$

حال با استفاده از معادلات بالا n_2 و n_3 را بر حسب n_1 محاسبه کرده و در معادله کمکی $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ قرار می دهیم، از این معادله مقدار n_1 محاسبه می شود و پس از آن دستگاه بالا قابل حل می شود.

نکته) جهت متناظر سه بردار حاصله در فضا باید بر هم عمود باشند و ضرب داخلی هر جفت آنها در هم باید صفر باشد. از این روش برای چک کردن جواب ها استفاده می شود.

تمرین) تانسور تنش زیر مفروض است مطلوبست محاسبه تنش های اصلی و جهات متناظر با هر یک از آنها؟

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 8\\ 0 & 4 & 18\\ 8 & 18 & 5\end{pmatrix}$$

$$\det[\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}]=0 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}6-5 & 0 & 8\\ 0 & 4-\sigma & 18\\ 8 & 18 & 5-\sigma\end{pmatrix}=0$$

$$(6-\sigma)[(4-\sigma)(5-\sigma)-18^2]+8[0-8(4-6)]=0$$
$$\sigma^3-16\sigma^2-314\sigma+2080=00$$
$$\sigma_1=5.6692 \qquad \sigma_2=24.38 \qquad \sigma_3=-15.0499$$

حال محاسبه جهات اصلی مربوط به تنش $\sigma_1=5.6692$

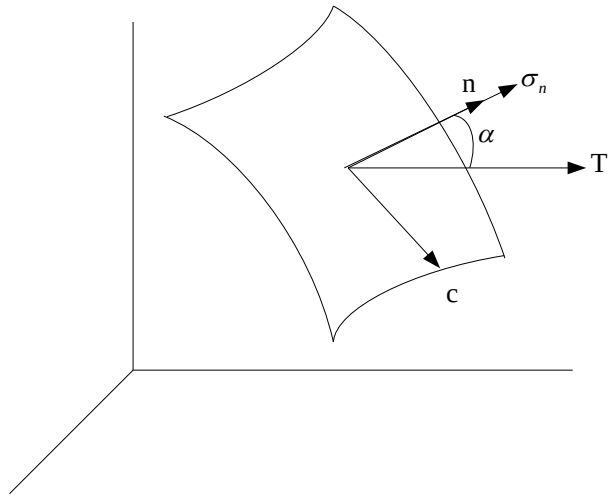
$$\begin{pmatrix}6-5.6692 & 0 & 8\\ 0 & 4-5.6692 & 18\\ 8 & 18 & 5-5.6692\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix}=0$$

$$,n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \qquad \sigma_1 \rightarrow \begin{cases}n_1=-0.9127\\ n_2=0.4065\\ n_3=0.0377\end{cases}$$

$$\sigma_2 \rightarrow \begin{cases}n_1=0.3102\\ n_2=0.6223\\ n_3=0.7125\end{cases} \qquad \sigma_3 \rightarrow \begin{cases}n_1=-0.2663\\ n_2=0.6620\\ n_3=0.7006\end{cases}$$

تنشهای برشی ماکزیمم و می نیمم:

همانطور که قبلاً گفته شد، بردار تنش و بردار عمود بر سطح در حالت کلی در یک امتداد نیستند. در این قسمت می خواهیم وضعیت صفحاتی را نسبت به صفحات تنش های قائم حداقل و حداکثر پیدا کنیم که تنش برشی روی این صفحات max یا min باشد. فرض می کنیم مطابق شکل برای یک سطح دلخواه بردار تنش با بردار عمود بر سطح زاویه α بسازد.



$$T^2 = \sigma_n^2 + T^2 \qquad T_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$T^2 = T^2 - \sigma_n^2$$

T_i مؤلفه های بردار تنش T در امتداد عددهای x_i و n_i مؤلفه های بردار عمود بر سطح هستند.

از طرفی : $\sigma_n = T_i n_i$

رابطه کوشی : $T_i = \sigma_{ij} n_j$

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_j$$

اگر فرض کنیم که محورهای x_i منطبق بر محورهای تنش های اصلی باشند داریم:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_n n_2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \qquad 1$$

رابطه کوشی : $T_1 = \sigma_1 n_1 \quad , T_2 = \sigma_2 n_2 \quad , \quad T_3 = \sigma_3 n_3$

داریم : $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$

از 1 $\sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$

$$T^2 = T^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

$$T^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_1^2 n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + n_2^2 n_3^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \qquad 2$$

مانند حالت دو بعدی که در امتداد 45 درجه اختلاف با تنش های قائم اصلی، تنش های برشی ماکزیمم است، در حالت سه بعدی نیز، اگر صفحات اصلی را بدست آوریم، تنش های برشی max روی صفحات نیمساز 45 درجه وجود دارد.

برای محاسبه تنش های برشی ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

$$\frac{\partial t^2}{\partial n_1} = 0 \rightarrow n_1[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\, n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)] = 0 \qquad A$$

$$\frac{\partial t^2}{\partial n_2} = 0 \rightarrow n_2[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\, n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)] = 0 \qquad B$$

حل و بحث در مورد معادلات فوق:

$$If \;\; n_1 = n_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad n_3 = \pm 1 \qquad 2 \rightarrow \;\; T = 0$$

$$If \begin{cases} n_1 = 0 \\ n_2 \neq 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad n_2^2 = \frac{1}{2} \;\; \rightarrow \;\; n_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \;\; \rightarrow \;\; n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \;\Rightarrow T = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

اگر فرض کنیم $\begin{cases} n_1 \neq 0 \\ n_2 = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad n_1^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \; n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

و چون $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad \rightarrow n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad 2 \rightarrow \tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

چنانچه گفتیم در رابطه 2 به دلخواه می توان n_1، n_2 یا n_3 را حذف کرد، در قسمت فوق ما n_3 را حذف کردیم و چنانچه n_2 را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$f\ n_3 = 0 \quad \rightarrow n_1 = n_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

تمرین) در مورد حذف n_1 و n_2 نیز انجام دهید؟

$$\cos u = q \big/ p\sqrt{p} \qquad < u < 180 \qquad n^3 = An + B$$

$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos u/3 \qquad p = A/3^z$$

$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos(4/3 + 120) \qquad q = B/2$$

$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos(4/3 + 240) \qquad q^2 - p^3 < 0 \qquad (I$$

$$x_1 = \left(q + \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{/3} \qquad q^2 - p^3 > 0 \qquad (II$$

$$+(q - \sqrt{q^2 - p^3}))^{1/3}$$

$$q^2 - p^3 = 0 \qquad (III$$

$$x_1 = 2q^{1/3}$$

$$x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = x_1 - a/3$$

معادله درجه 3 به صورت روبرو می شود پس بجای هر x، x-a/3 قرار می دهیم.

$$T^2 = \tau^2 + \sigma n^2 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 = T^2 - \sigma n^2 = (tn^2 + ty^2 + tz^2) - (t_n n_m + t_y + t_z h_z)^2$$

نکته: جهت پیدا کردن صفحات اصلی و مقادیر اصلی تانسور کرنش باید از مؤلفه های تانسور متغیر فرم حقیقی استفاده کنیم.

با توجه به مقادیری که برای کسینوس های هادی در هر مرحله بدست می آید می توان گفت که تنش برشی حداقل و حداکثر نسبت به تنش های ma x و min تحت زاویه °45 قرار دارند.

تانسور تنش انحرافی:

می دانیم که تانسور تنش را می توان بصورت رابطه زیر تجزیه کرد:

$$[\sigma_{ij}]=\overset{\sigma'_{ij}}{[\sigma_{ij}-\sigma_1\delta_{ij}]}+[\sigma_0\delta_{ij}]$$

که تنش σ_0 را تنش هیدروستاتیک می نامند و داریم: $\sigma_0=\frac{\sigma_{ij}}{3}=\frac{I_1}{3}$ میانگین تنش های اصلی

σ'_{ij} را تانسور تنش انحرافی می گویند که در تشریح رفتار غیر الاستیک مواد کاربرد دارد.

تنش هیدروستاتیک فقط در تغییر حجم اثر دارد و در تسلیم جسم اثری ندارد در فقط تنش انحرافی مؤثر است. برای تانسور تنش انحرافی نیز همانند تانسور تنش معمولی تنش های اصلی و جهات اصلی داریم.

اگر داشته باشیم: $\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 9 & 11\end{pmatrix}$ آنگاه $\sigma_0=\frac{2+5+11}{3}=\sigma$

و در نتیجه تانسور تنش انحرافی به شکل زیر می شود.

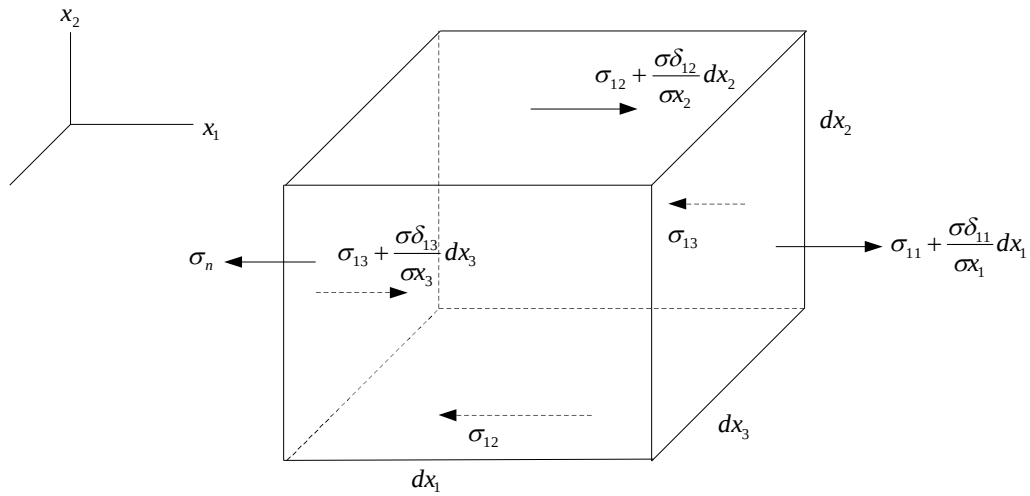
$$\sigma'_{ij}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 7\\ 3 & 9 & 5\end{pmatrix}$$

معادلات تعادل:

$$\frac{\partial\sigma i_{ij}}{\partial x_j}+pf_i=pu_i$$

مکعب شکل زیر را در نظر بگیرید (مکعب تنش). برای سهولت بحث فقط مؤلفه هایی از تنش را که در جهت محور x_1 هستند نشان دادیم، فرض می کنیم مرکز ثقل مکعب شتابی برابر $\bar{u}-u_1\bar{e}_2+u_2\bar{e}_2+u_3\bar{e}_3$ داشته باشد. و جرم مخصوص مصالح آن p و نیروهای وارده بر آن به ترتیب f_3,f_2,f_1 باشند. در اثر بارهای وارده اعم از فشار، نیروی جرمی، نیروی اینرسی و ... مقادیر

تنش در سطوح مقابل مکعب یکسان نمی باشد و دارای تغییرات جزئی می باشد که این تغییـرات در شکل نشان داده شده است.



$$\sum f_{x1} = m\tilde{x}_1 = m\tilde{u}_1$$

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1\,dx_2-\sigma_{13}dx_1dx_2$$

$$+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3-\sigma_{12}dx_1dx_3+\ f_1\ pdx_1dx_2dx_3=pdx_1dx_2dx_3u_1$$

$$\rightarrow\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+pf_1-pu_1$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+pf_2-pu_2$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+pf_3-pu_3$$

بصورت اینرسی $\sigma_{ij,j}+pf_i=pu_i$

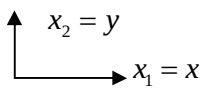
تمرین) معادلات تعادل را در مختصات قطبی و استوانه ای بدست آورید؟

تمرین) اگر نیروهای حجمی قابل صرف نظر کردن باشد تعیین کنید که آیا توزیع تنش هـای زیـر جسم را در حالت تعادل نگه می دارد؟

$$x_1 = x$$
$$x_2 = y$$

$$\begin{bmatrix} -3/2x^2y^2 & xy^3 \\ xy^3 & -1/4y^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad i, j = 1,2$$



$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad \frac{x_1 = x}{x_2 = y} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3xy^2 + 3xy^2 = 0 \\ y^3 - y^3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

تغییر مکان - کرنش و معادلات سازگاری:

تمامی اجسام قابل انعطاف تحت بارهای مختلف تغییر شکل می دهند. در ایـن بخـش بـه بررسـی میزان تغییر مکان در یک محیط پیوسته می پردازیم.

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial n_j}+\frac{\partial u_j}{\partial n_i}\right)$$

$$i=j=1\ \ \varepsilon_{nn}=\varepsilon_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial_n}+\frac{\partial u_n}{\partial_n}\right)$$

$$\frac{1}{2}\partial xy=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{ny} & \frac{1}{2}\gamma_{nz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yn} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zn} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

روابط سازگاری: Compatibility equation

عبارت سازش دارای هر دو مفهوم ریاضی و فیزیکی است. از نقطه نظر ریاضی این روابط نشان می دهند که u و v و w (تغییر مکان ها) توابع پیوسته و تک مقدار هستند، از نظر فیزیکی یعنی جسم پیوسته و یکپارچه است. روابط زیر شش مؤلفه کرنش را به سه مؤلفه تغییر مکان ارتباط می دهد، در نتیجه نمی توان همه مؤلفه های کرنش را به طور دلخواه به صورت توابع ای x و y و z نوشت. چون کرنش های مستقل از هم نیستند باید بین آنها روابطی وجود داشته باشد.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma yz}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma zx}{\partial z \partial x}$$

مشتق از ∂xy در رابطه بالا $\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial^2 y \partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x \partial y}$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \gamma xz}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 \gamma yz}{\partial x^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x \partial z}=.....$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x \partial y}=.....$$

رابطه تانسوری $\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}=\varepsilon_{ikjl}+\varepsilon_{jl,ik}$ سازگاری اثبات این رابطه است.

تمرین) رابطه فوق را بسط داده و 6 رابطه بدست آورید؟

تمرین) روابط کرنش در مختصات استوانه ای و کروی را بدست آورید؟

تمرین) تابع تنش ایری (هوایی) را بررسی کنید؟ $\nabla^4 \varphi = 0$

تمرین) مقال 10 و 11 و 12 صفحات 123 و 126 حل شود؟

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2{}^2}=\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial n_1^5 x_2{}^2}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad \varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1{}^2}=\frac{\partial^3 u_{22}}{\partial n_2 \partial x_1{}^2}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1{}^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial n_1 x_2{}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial {x_1}^2} = \frac{2\varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\partial^2 \varepsilon_{22} = \partial^2 \varepsilon_{33} = \partial^2 \varepsilon_{23}$$

روابط تغییر طول نسبی:

معادلات کرنش در جهت z,y,x

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

کرنش حقیقی $\leftarrow \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\partial_{12}$

کرنش مهندسی $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

تانسور کرنش $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

با قرارداد : $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \varepsilon_{11}$

$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \varepsilon_{22}$

$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = \varepsilon_{33}$

یعنی با قراردادن تعویض اندیسها:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{12} \qquad x \to 1$$
$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{13} \qquad y \to 2$$
$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{23} \qquad z \to 3$$

روابط بین مؤلفه های تانسور کرنش که به روابط سازگاری معروفند. روابط بین ε, γ

$$\Uparrow$$

$$\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma xz}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma yz}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial y^2}$$

تانسور کرنش نیز مانند تانسور تنش به دو بخش هیدرواستاتیک و تانسور کرنش انحرافی یا برشی قابل تجزیه می باشد.

بخش انحرافی

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} + \hat{\varepsilon}_{ij}$$

بخش هیدرواستاتیک

توجه) مؤلفه های تانسور کرنش باید معادلات سازگاری را اقناع کنند تا میدان تغییر مکان قابل قبول باشد. همانطور که مؤلفه های تانسور تنش باید معادلات دیفرانسیل تعادل را اقناع کنند تا میدان تنش قابل قبول باشد.

معادلات تعادل در مختصات
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \dfrac{\partial \sigma x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau xy}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau xz}{\partial z} + f_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \dfrac{\partial \sigma y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau yx}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau yz}{\partial z} + f = 0 \\ \sum F_z = 0 & \dfrac{\partial \sigma z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau zx}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau zy}{\partial y} + f_z = 0 \end{cases}$$

f_z, f_y, f_x نیروهای کالبری بر واحد حجم می باشند.

شکل تانسوری معادلات دیفرانسیل $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$

خلاصه :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{i,j} + u_{j,i})$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_2}{\partial u_1})$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

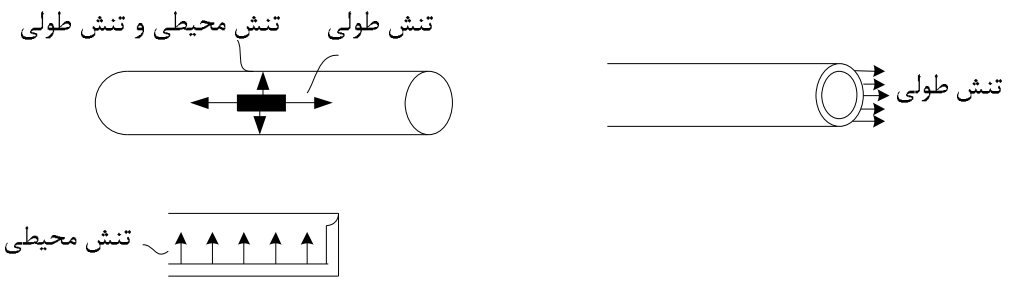
از حذف تغییر مکان از معادلات فوق به 6 معادله می رسیم بر حسب کرنش که به آنها روابط سازگاری گویند.

پوسته ها (مخازن جدار نازک)

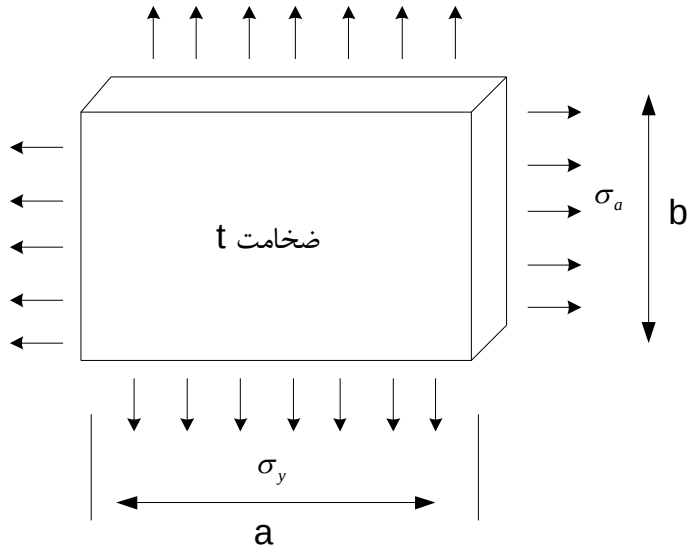
پوسته ها: پوسته به شکل هندسی اطلاق می شود که نسبت ضخامت به بزرگترین بعد آن کمتر از $\frac{1}{10}$ باشد.

در مخازن استوانه ای و کروی جدار نازک باید رابطه $\frac{t}{r_i} < \frac{1}{20}$ برقرار باشد.

فرض سهم در این پوسته ها، فرض برقراری رابطه تنش صفحه ای است.



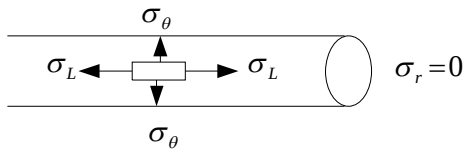
فرض تنش صفحه ای: هنگامی که از مقدار تنش در یک بعد در مقایسه بـا دو بعـد دیگـر صـرف نظر می شود. معمولاً در پوسته ها و ورق های جدار نازک این فرض معتبر است.



$$\begin{matrix} t << a \\ t << b \end{matrix} \rightarrow \sigma_z \ 0$$

به عنوان مثال از وضعیت تنش صفحه ای، وضعیت تنش در پوسته ها را می توان ذکر کرد.

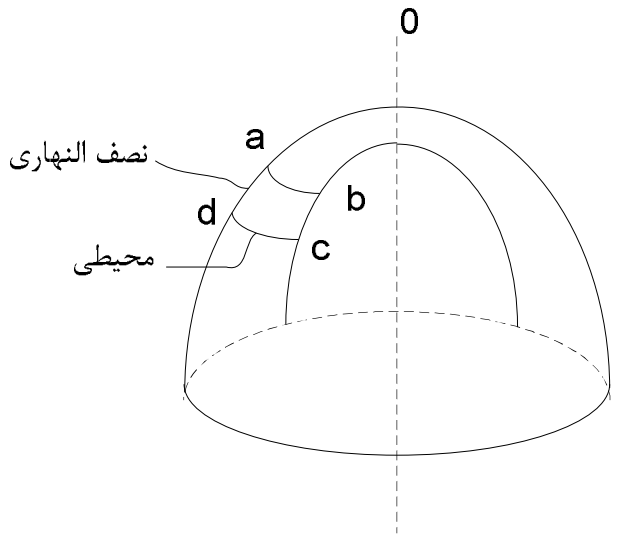
که در آنها مقدار تنش در جهت عمود بر پوسته (سطح پوسته) در مقایسه با دو جهت دیگـر صـرف نظر می شود.



تئوری دوران پوسته ها (مخازن جدار نازک):

مطابق این تئوری هر پوسته ای از دوران یک منحنی حول حادث می شود.

توضیح: سطح پوسته از برخورد دو سری منحنی بوجود می آید، منحنی های محیطی و منحنی های نصف النهاری.

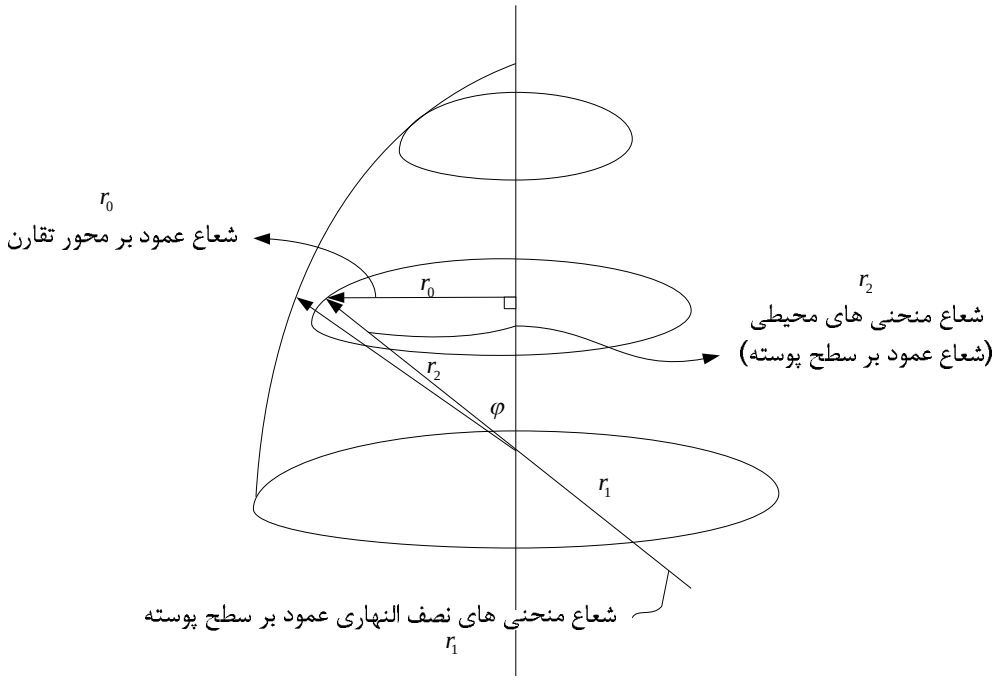


منحنی های نصف النهاری در هر نقطه دارای شعاع r_1 هستند که در حالت کلی مرکز آنها روی محور تقارن مخزن قرار ندارد.

منحنی های محیطی در هر نقطه دارای شعاع r_2 هستند که مرکز آنها روی محور تقارن (محور دوران) است.

r_0 شعاع عمود بر محور دوران در هر نقطه

r_1 شعاع عمود بر منحنی نصف النهاری
r_2 شعاع عمود بر سطح پوسته
} در یک امتدادند

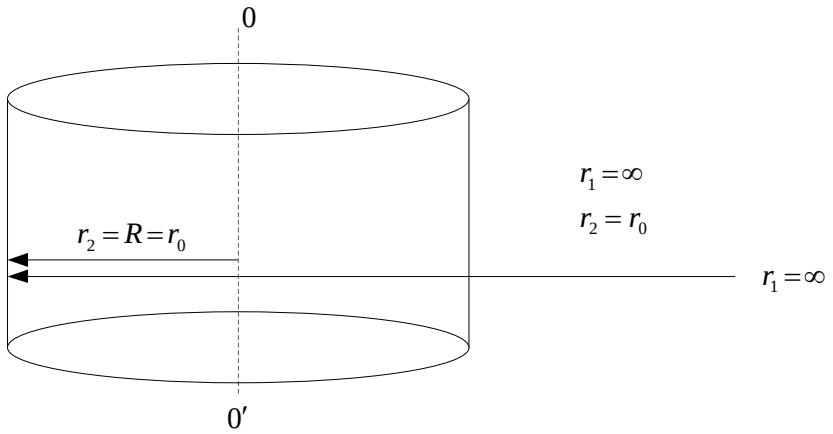


معمولاً در محاسبات از شعاع دیگری بنام r_0 نیز کمک می گیرند که این شعاع در هر نقطه از پوسته عمود بر محور دوران است و ارتباط آن با r_2 بصورت زیر است.

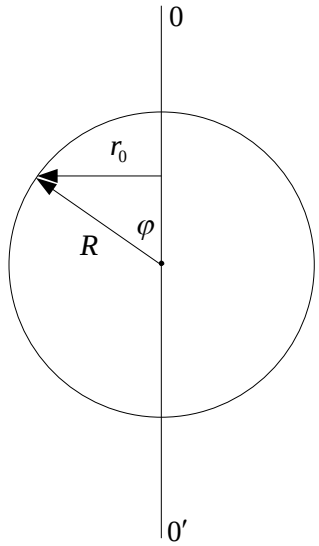
$$r_0 = r_2 \sin\varphi$$

چون شناخت شعاعهای r_1 و r_4 در این مخازن اهمی ویژه ای دارد در چند حالت خاص مقادیر آنها را می نویسیم:

الف) پوسته های استوانه ای

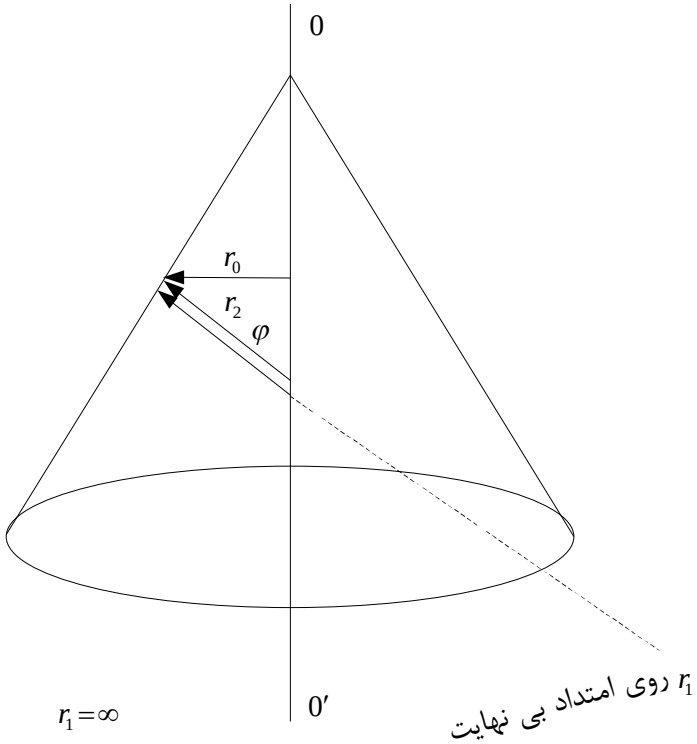


ب) پوسته های کروی:



$$r_1 = r_2 = R$$
$$r_0 = r_1 \sin\varphi = r_2 \sin\varphi$$
$$r_0 = R \sin\varphi$$

ج) پوسته مخروطی:

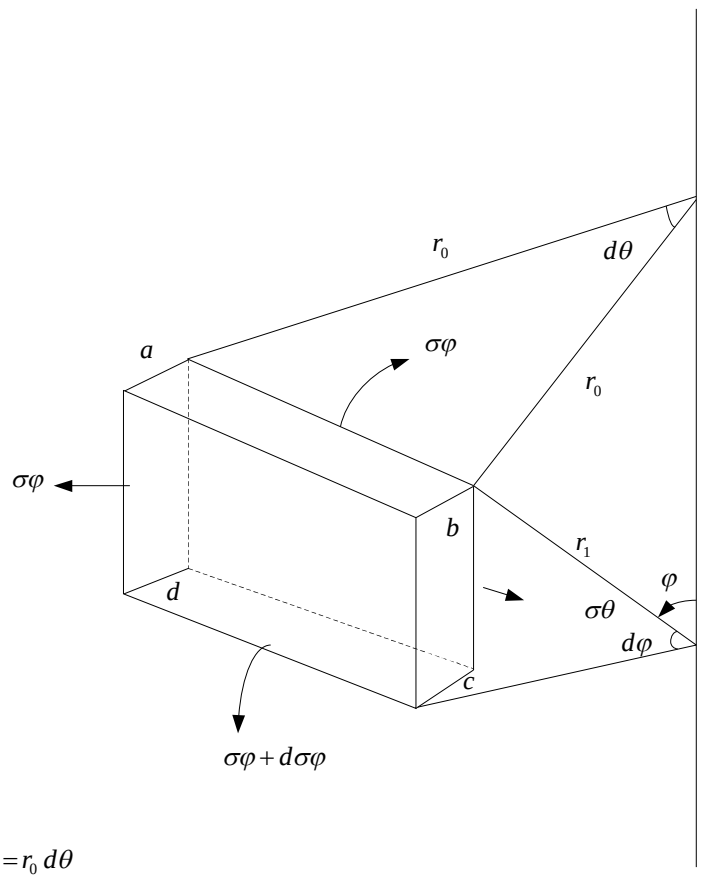


$$r_1 = \infty$$
$$r_0 = r_2 \sin\varphi$$

خلاصه:

با توجه به تئوری دورانی این پوسته ها فرض شد که سطح مخزن توسط دو شعاع r_1 و r_2 تعریف می شود بطوریکه منحنی هایی که شعاع آنها r_1 است منحنی های نصف النهاری بوده و مرکز انحنای آنها در حالت کلی روی مرکز تقارن پوسته قرار ندارد و منحنی های محیطی با شعاع r_2 مرکز انحنای آنها در حالت کلی روی محور تقارن پوسته قرار دارد. معمولاً در محاسبات شعاع r_0 را نیز داریم که عمود بر محور تقارن قرار دارد و ارتباط آن با شعاع r_2، بصورت $r_0 = r_2 \sin\varphi$ است.

حال برای تجزیه و تحلیل تنش ها در مخازن با توجه به شکل زیر معادلات تعادل را در جهت عمود بر سطح پوسته بدست می آوریم:



با توجه به شکل فوق:

$$ab = r_0\, d\theta$$
$$bc = r_1\, d\varphi$$
$$r_0 = r_2 \sin\varphi$$

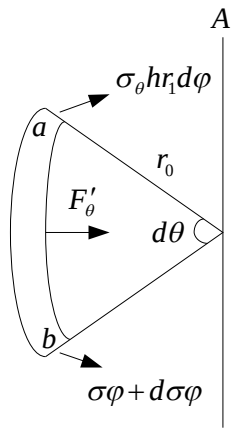
h ضخامت پوسته است که در مقایسه با r_1 و r_2 ناچیز است.

نمایش نیروهای مربوط به تنش محیطی:

نمای بالای المان صفحه قبل:

برای نمایش نیروهای ناشی از تنش محیطی نمای بالای المان شکل فوق را در نظر می گیریم:

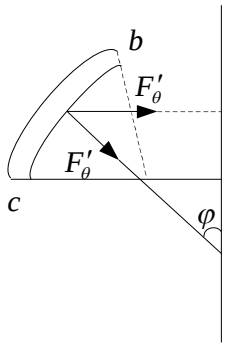
سطح جانبی المان $A=h_1 r_1 d\varphi$



$$F'_\theta = 2F_\theta \sin\frac{d\theta}{2} = 2F_\theta \frac{d\theta}{2}$$
$$F'_\theta = F_\theta\, d\theta = \sigma_\theta\, h r_1 d\theta d\varphi$$

نیروی F'_θ عمود بر محور تقارن است ولی ما نیرویی را می خواهیم که بر سطح المان عمود اسـت.

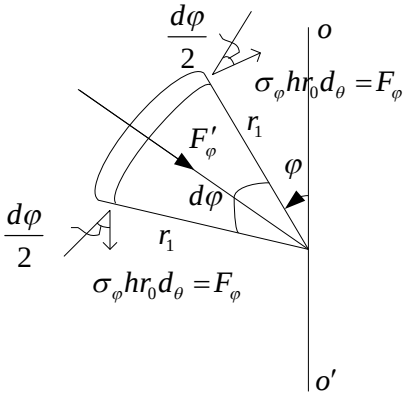
پس این نیرو را باید تصویر کرد.



$$F''_\theta = F'_\theta \sin\varphi = \sigma_\theta . h . r_1 . d_\theta . d_\varphi . \sin\varphi \qquad 1$$

برآیند نیروهای ناشی از تنش محیطی در هر نقطه در جهت عمود برپوسته

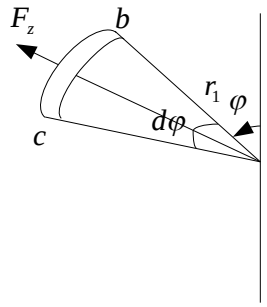
نماش نیروهای مربوط به تنش نصف النهاری:



$$F'_\varphi = 2F_\varphi \sin\frac{d\varphi}{2} = F_\varphi h\varphi = \sigma_\varphi h r_0 d_\varphi d_\theta \quad 2$$

نمایش نیروهای وارده بر پوسته ناشی از فشار داخلی آن:

چنانچه فرض کنیم فشار وارد بر سطح پوسته به سمت خارج پوسته P_z است، نیروی ناشی از آن با توجه به شکل زیر برای المان مورد نظر نوشته می شود:

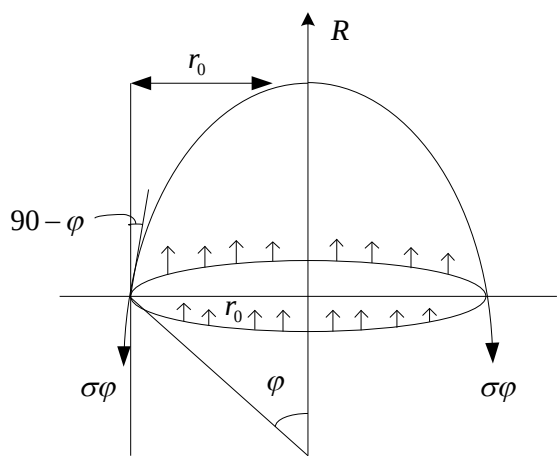


3 $F_z = P_z r_0 d\theta r_1 d\varphi$ نیروی ناشی از فشار داخل پوسته در جهت عمود بر سطح پوسته

با نوشتن رابطه تعادل در جهت عمود بر سطح پوسته با توجه به روابط 1 و 2 و 3 خواهیم داشت:

$$\sum F_n = 0$$
$$\sigma_\theta h r_1 d_\varphi d_\theta \sin\varphi + \sigma_\varphi h r_0 d_\theta d_\varphi - P_z r_0 d_\theta r_1 d_\varphi = 0$$
$$r_0 = r_2 \sin\varphi$$
$$\rightarrow \sigma_\theta h r_1 d_\varphi d_\theta \sin\varphi + \sigma_\varphi h r_2 \sin_\varphi d_\theta d_\varphi - P_z r_2 \sin_\varphi d_\theta r_1 d_\varphi = 0$$
$$\sigma_\theta h r_1 + \sigma_\theta h r_2 - P_z r_1 r_2 = 0$$
$$\sigma_\theta h + \frac{\sigma_\varphi h}{r_1} r_2 - P_z r_2 = 0$$
$$\frac{\sigma_\theta}{r_2} + \frac{\sigma\varphi}{r_1} = \frac{P_z}{h} \qquad (I)$$

برای بدست آوردن رابطه دوم تعادل معادله تعادل را در جهت قائم می نویسیم:



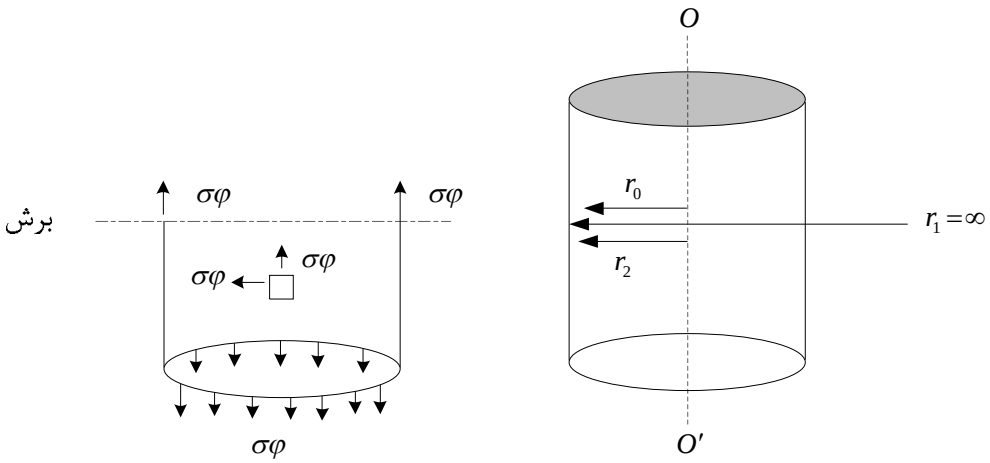
R برآیند نیروهای ناشی از فشار داخلی P_z در امتداد قائم

$$\sum F_y = 0$$
$$(2\pi \bar{r} h)\sigma_\varphi \sin\varphi - R = 0$$
$$(2\pi \bar{r} h)\sigma_\varphi \sin\varphi - P_z \pi \bar{r}^2 = 0$$
$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{P_z \bar{r}}{2h\sin\varphi} \qquad (II)$$
,
$$\sigma_\varphi = \frac{R}{2\pi \bar{r} h \sin\kappa}$$

معادلات (I) و (II) معادلات حاکم بر پوسته ها می باشند و چون در بدست آوردن آنها از خواص مصالح استفاده نشده است در هر ناحیه ای معتبر می باشند (در ناحیه الاستیک و پلاستیک معتبر می باشند) نکته مهم در ساخت مخازن این است که در عمل روشی انتخاب شود که نیروهای وارد بر تکیه گاهها حدامکان در امتداد قائم نباشد.

تمرین) مطلوبست تعیین تنشهای محیطی و نصف النهاری در یک پوسته استوانه ای که تحت فشارداخلی P_i است. شعاع استوانه α 1 فرض کنید؟

$r_1 = \infty$
$r_2 = r_0 = \alpha$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow p_i \pi \alpha^2 - \sigma_\varphi 2\pi a h = 0 \rightarrow \sigma_\varphi = \frac{p_i a}{2h}$$ تنش نصف النهاری

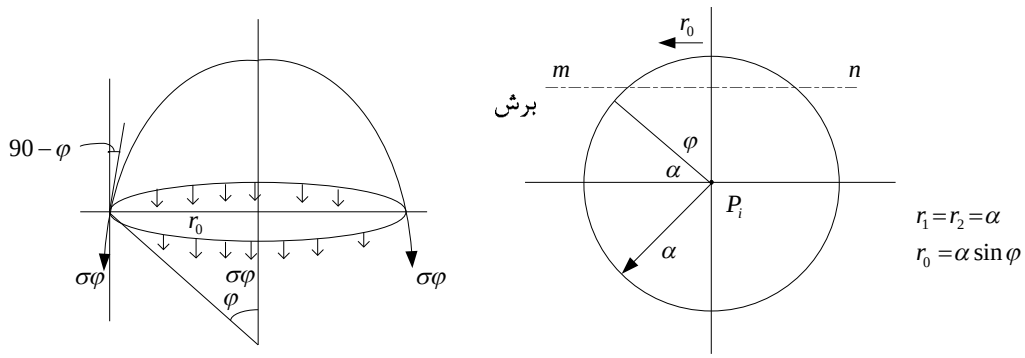
داریم در مخازن : $\frac{\sigma_\varphi}{r_2} + \frac{\sigma_\varphi}{r_1} = \frac{Pi}{h}$

زیرا $r_1 = \infty$

$$\rightarrow \frac{\sigma_\varphi}{\alpha} = \frac{Pi}{h} \rightarrow \sigma_\varphi = \frac{P_i \alpha}{h}$$ تنش محیطی

تمرین) مطلوبست تعیین تنش های غشایی در یک پوسته کروی بـه ضـخامت h کـه تحـت فشـار داخلی Pi قرارگرفته است؟

شعاع کره را α در نظر بگیرد.



$$\sum F_y = 0$$

$$\sigma_\varphi \sin\varphi 2\pi r_0 h + P_i \pi r_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_\varphi = \frac{p_i \pi r_0^2}{2\pi r_0 h \sin\varphi} = \frac{p_i \pi \alpha^2 \sin^2\varphi}{2\pi \alpha \sin\varphi h \sin\varphi}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_\varphi = \frac{P_i \alpha}{2h}$$ تنش نصف النهاری

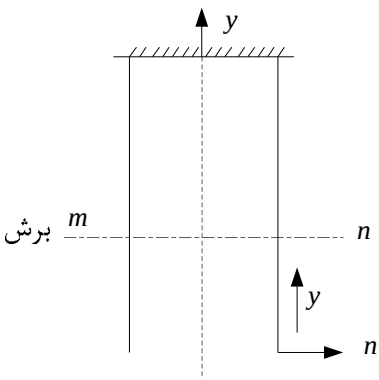
$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\varphi}{r_2} - \frac{P_i}{h} \quad \rightarrow \quad \frac{P_i \alpha}{2h\alpha} + \frac{\sigma_\varphi}{\alpha} = \frac{P_i}{h}$$

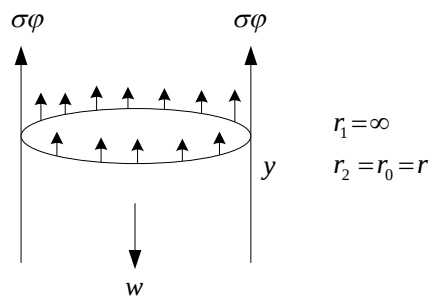
$$\rightarrow \frac{P_i}{2h} + \frac{\sigma_\varphi}{\alpha} = \frac{P_i}{h}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_\varphi = \alpha\left(\frac{P_i}{h} - \frac{P_i}{2h}\right) = \alpha\left(\frac{2P_i - P_i}{2h}\right) = \frac{P_i \alpha}{2h}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_\varphi = \frac{P_i \alpha}{2h}$$ تنش محیطی

تمرین) مطلوبست تعیین تـنش هـای غشـایی در یـک پوسـته اسـتوانه ای بـه ضـخامت h و وزن مخصوص γ که مطابق شکل از سقفی آویزان شده است؟ (انتهای پوسته باز است)





$$\sum F_y=0 \rightarrow \sigma_\varphi(2\pi rh)-W=0 \qquad p_g=\gamma=\frac{W}{V}$$

$$W=\gamma V=\gamma(2\pi ry)h$$

$$W=2\pi rh\sigma_\varphi$$

$$2\pi rh\sigma_\varphi=\gamma 2\pi rh\,yh \qquad \rightarrow \qquad \sigma_\varphi=\gamma y$$ تنش نصف النهاری

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1}+\frac{\sigma_\varphi}{r_2}=\frac{P_i}{h} \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_\varphi}{r_2}=0 \quad \rightarrow \quad \sigma_\varphi=0$$

$$r_1=\infty \qquad P_i=0$$

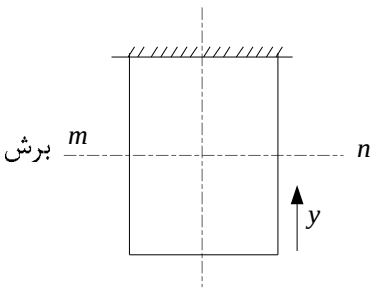
$\gamma P_{iy}= h$ وزن واحد سطح $P_{ix}=0$

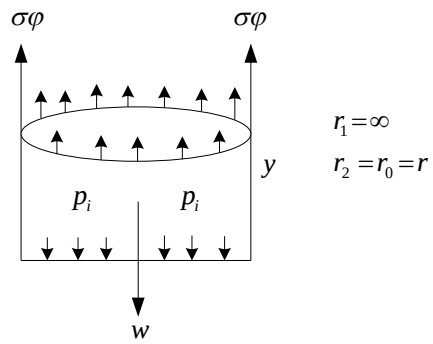
با استفاده از وزن واحد حجم γ وزن واحد سطح را بصورت γh بدست می آوریم ولی این نیـرو در راستای قائم بوده و مؤلفه ای در جهت عمود بر پوسته ندارد.

تمرین) چنانچه در تمرین قبل قسمت پایین استوانه بسته باشد و در داخل استوانه فشار p داشته باشیم، تنش های غشایی را بدست آورید؟

وزن مخصوص γ صفحات h

شعاع r





$$\sum F_y=0 \rightarrow W-\sigma_\varphi 2\pi rh+p\pi r^2=0$$

$$\rightarrow W=-p\pi r^2+\sigma_\varphi 2\pi rh$$

$$g=\frac{w}{v} \qquad \rightarrow W=\gamma v=\gamma(2\pi rgh)$$

$$\Rightarrow \ 2\pi ryh\gamma=p\pi r^2+\sigma_\varphi n\pi rh$$

$$\sigma_\varphi=\frac{2\pi ryh\gamma+p\pi nr^2}{2\pi rh}=\frac{2yh\gamma+pr}{2h}=\gamma y+\frac{\mathrm{Pr}}{2h}$$

$$\Rightarrow \ \sigma_\varphi=\gamma y+\frac{\mathrm{Pr}}{2h}$$ تنش نصف النهاری

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1}+\frac{\sigma_\varphi}{r_2}=\frac{P}{h}$$

$$r_1=\infty$$

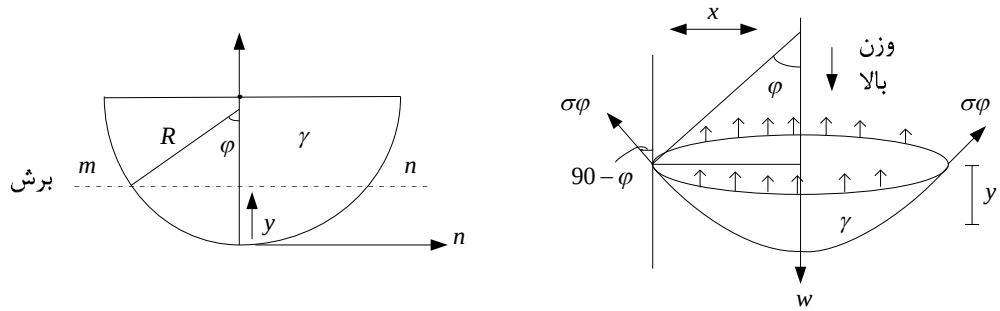
$$\sigma_\theta=\frac{\mathrm{Pr}_2}{h}$$

$$\rightarrow \sigma_\theta=\frac{\mathrm{Pr}}{h}$$ تنش محیطی

در حل این تیپ مسائل دقت شود. زمانیکه برشی زده می شود باید به نیروهایی که به قسمت برش خورده وارد می شود دقت نمود.

تمرین) مخزن نیم کروی شکل زیر به شعاع R و ضخامت جداره h با مایعی بـه وزن مخصـوص γ پر شده است. پوسته مورد نظر در سراسر لبه فوقانی اش بر تکیه گاهی قرار دارد. مطلوبست تعیـین تنش های غشایی در این پوسته؟ اگر خود پوسته دارای وزن مخصوص p باشد.

آیا نقطه ای از این پوسته را می توان یافت که در آن تنش های غشایی صفر باشد؟



ابتدا وزن سیال را که تا ارتقاع y قرار دارد را بدس می آوریم.

$$w=\gamma\int_0^y \pi x^2 dy=\gamma v$$

معادله دایره $x^2+(y-R)^2=R^2 \quad \rightarrow \quad x^2=R^2-(y-R)^2$

$$w=\gamma\int_0^y \pi[R^2-(y-R)^2]dy=\gamma\pi[R^2y-\frac{(y-R)^3}{3}]\int_0^y$$

$$=\gamma\pi[R^2y-\frac{1}{3}(y-R)^2-\frac{1}{3}R^3]=\gamma\pi(-\frac{y^3}{3}+y^2R)$$

$$\rightarrow w=\gamma\pi y^2(-\frac{y}{3}+R)$$

$$\rightarrow \ if\ y-R\rightarrow w=\lambda(2/3\pi R^3)$$

$$\sum F_y=0 \quad \rightarrow \ \sigma_\varphi(2\pi x)h\sin\varphi-w-\gamma(R-y)\pi x^2=0$$

نیروی ناشی از وزن قسمت بالا وزن قسمت پایین نیروی تنش نصف النهاری

حال ما باید معادله را بر حسب یک متغیر بنویسیم:

$$x = R\sin\varphi$$
$$y = R - R\cos\varphi = R(1-\cos\varphi)$$
$$\sigma_\varphi (2\pi R\sin\varphi) h\sin\varphi - \gamma\pi R^2 (1-\cos\varphi)^2 \left[R - \frac{1}{3}R(1-\cos\varphi) \right] - \gamma\pi R^2 \sin^2\varphi$$
$$\left[R - R(1-\cos\varphi)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{\gamma R^2 (1-\cos^3\varphi)}{3h\sin^2\varphi}$$ تنش نصف النهاری

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\varphi}{r_2} = \frac{P}{h}$$
$$r_1 = r_2 = R \ , P = \gamma(R-y) = \gamma R\cos\varphi$$

$$\sigma_\theta = \frac{RP}{h} - \sigma_\varphi = \frac{PR}{h} - \frac{\gamma R^2 (1-\cos^3\varphi)}{3h\sin^2\varphi} = \frac{\gamma R^2 \cos\varphi)}{h} - \frac{\gamma R^2 (1-\cos^3\varphi)}{3h\sin^2\varphi}$$
$$\rightarrow \sigma_\theta = \frac{\gamma R^2}{3h}(3\cos\varphi - \frac{1-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}$$

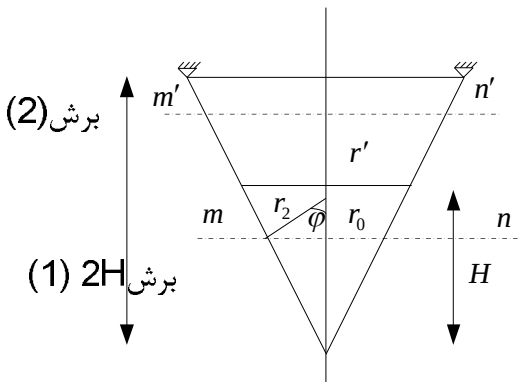
$$if \ \ \sigma_\varphi = 0 \ \ \rightarrow 1-\cos^3\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0 \ \ \rightarrow \sin\varphi = 0 \ \ \rightarrow \ \sigma_\varphi = \frac{\gamma R^2}{h}$$

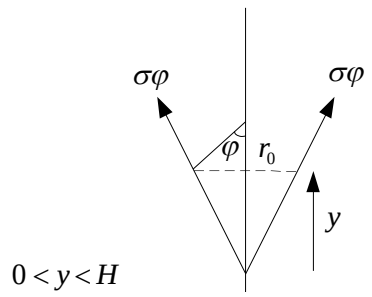
$$if \ \ \sigma_\varphi = 0 \ \ \rightarrow 3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi - 1 = 0 \begin{cases} \varphi = 68.5^\circ & \rightarrow \sigma_\varphi \neq 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

چون هیچ جواب مشترکی ندارند پس هیچ نقطه ای از سطح کره دارای جواب صفر نیست.

تمرین) پوسته مخروطی شکل شامل مایعی به وزن مخصوص γ می باشد. مطابق شکل پوسته در ابتدای لبه فوقانی اش تکیه گاه دارد و ارتفاع مایع در آن H می باشد. اگر ارتفاع پوسته مخروطی 2H باشد. مطلوبست تعیین تنش های غشایی ایجاد شده در جداره پوسته؟

ضخامت جداره h و $r_1 = \infty$ $r_0 = r_2 \sin\varphi$





سه نیروی مؤثر در قسمت برش خورده داریم:

1) نیروی ناشی از وزن سیال یا ارتفاع y
2) نیروی ناشی از تنش غشایی
3) نیروی ناشی از فشار سیال قسمت بالا به پایین

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \sigma_\varphi \cos\alpha (2\pi r_0 h) - \gamma 1/3 \pi r_0^2 y - \gamma (H - y) \pi r_0^2 = 0$$

حال باید این معادله را بر حسب یک متغیر نوشت:

داریم : $r_0 = y \tan\alpha$

$$\sigma_\varphi \cos\alpha(2\pi y \tan\alpha\, h) - \gamma 1/3\pi y^3 \tan^2\alpha - \gamma(H-y)\pi y^2 \tan^2\alpha = 0$$

$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{\gamma \tan\alpha}{h\cos\alpha}\left(\frac{Hy}{2} - \frac{y^3}{3}\right) \quad 0 \le y \le H$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\varphi}{r_2} = \frac{P}{h} \qquad \rightarrow \qquad \alpha_\varphi = \frac{\mathrm{P}r_2}{h}$$

$$r_1 = \infty$$

$$P = \gamma(H-y) \qquad r_0 = r_2\cos\alpha \qquad \rightarrow \quad r_2 = \frac{r_0}{\cos\alpha}$$

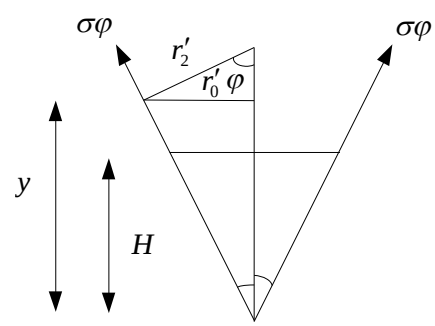
$$r_0 = y\tan\alpha$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\gamma(H-y)\dfrac{y\tan\alpha}{\cos\alpha}}{h} = \frac{\gamma y \tan\alpha (H-y)}{h\cos\alpha}$$

حال برای نیمه بالایی محاسبات زیر را انجام می دهیم:

1) نیروی ناشی از تنش

2) نیروی ناشی از سیال قسمت پایین



$r_1' = \infty$
$r_0' = r_2' \sin\alpha$
$r_0' = y \tan\alpha$
$H < y < 2H$

$$\sum F_y = 0 \qquad \rightarrow \quad \sigma_\varphi \cos\alpha \, 2\pi r_0' h - \gamma \frac{1}{3}\pi (H \tan\alpha)^2 H = 0$$

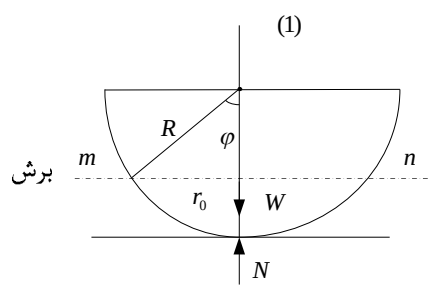
$$\rightarrow \sigma_\varphi \cos\alpha \, 2\pi y \tan\alpha \, h - \gamma \frac{1}{3}\pi H^3 \tan^2\alpha = 0$$

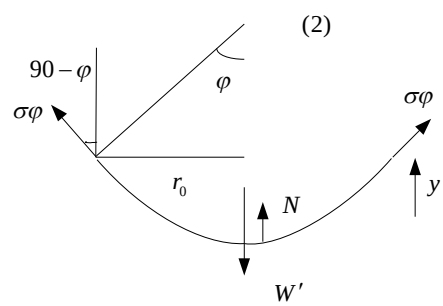
$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{\gamma H^3 \tan\alpha}{\sigma h y \cos\alpha} \quad H < y < 2H$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} = \frac{\sigma_\varphi}{r_2} = \frac{P}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_\varphi = 0$$

تمرین) مطلوبست تعیین تنش های غشایی در پوستهای به ضخامت t و کسروی و وزن مخصوص γ که در یک سطح افقی به حالت تعادل قرار گرفته است. داخل پوسته سیال وجود ندارد و هیچ فشاری وارد نمی شود؟

$r_i = r_2 = R$
$r_0 = R \sin\varphi$





معادله ی دایره $n^2 + (y - R)^2 = R^2$

1) نیروی ناشی از σ_φ

2) نیروی ناشی از عکس العمل سطح N

3) نیروی ناشی از وزن

$$(2)\ \sum F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_\varphi \cos\varphi\, 2\pi r_0 t + N - W' = 0$$

ازدیاگرام آزاد کل مجموعه داریم در شکل (1)

$$(1) \quad \rightarrow W - N = 0$$

$$\rightarrow \gamma(2\pi R^2 t) - N = 0 \qquad \rightarrow \quad N = 2\pi R^2 \gamma t$$

$$\sigma_\varphi 2\pi r_0 t \cos\varphi + 2\pi R^2 \gamma t - W'$$

$$W' = At\gamma \qquad , \qquad A = 2\pi \int n ds \qquad , \qquad y = R + \sqrt{R^2 - n^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y_2'}\, dn \qquad \rightarrow \qquad A = 2\pi \int n \sqrt{1 + \frac{n^2}{R^2 - n^2}}\, dn$$

$$A = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{nR}{\sqrt{R^2 - n^2}\, dn} \qquad \Rightarrow \quad W' = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - n^2})\gamma t$$

$$\sigma_\varphi 2\pi r_0 t \cos\varphi + 2\pi R^2 \gamma t - 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - x^2})\gamma t = 0$$

$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{\gamma R \sqrt{R^2 - x^2}}{x \cos\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\gamma R^2}{x}$$

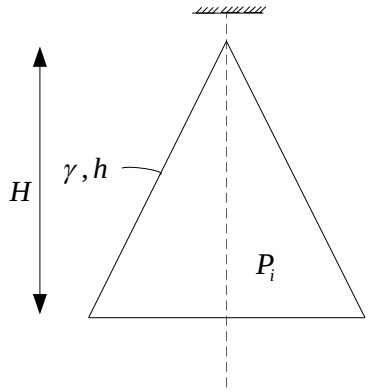
$$p = \gamma t \cos\varphi$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\varphi}{r_2} = \frac{P}{t} \quad \rightarrow \quad \sigma_\theta = \gamma R \cos\varphi - \frac{\gamma R^2}{x}$$

$$r_1 = r_2 = R$$

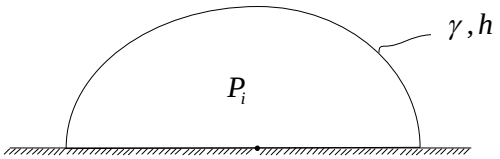
تمرین) مطلوبست تعیین تنش های غشایی در یک پوسته مخروطی کـه مطـابق شـکل از سـقفی آویزان است. ته پوسته مخروطی بسته بوده و فشار داخلی آن P_i است؟

γ وزن واحد حجم

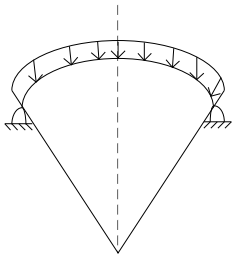


تمرین) مطلوبست تعیین تنشهای غشایی در یک پوسته نیم کره ای مطابق شکل:

به شعاع R و فشار داخلی P_i



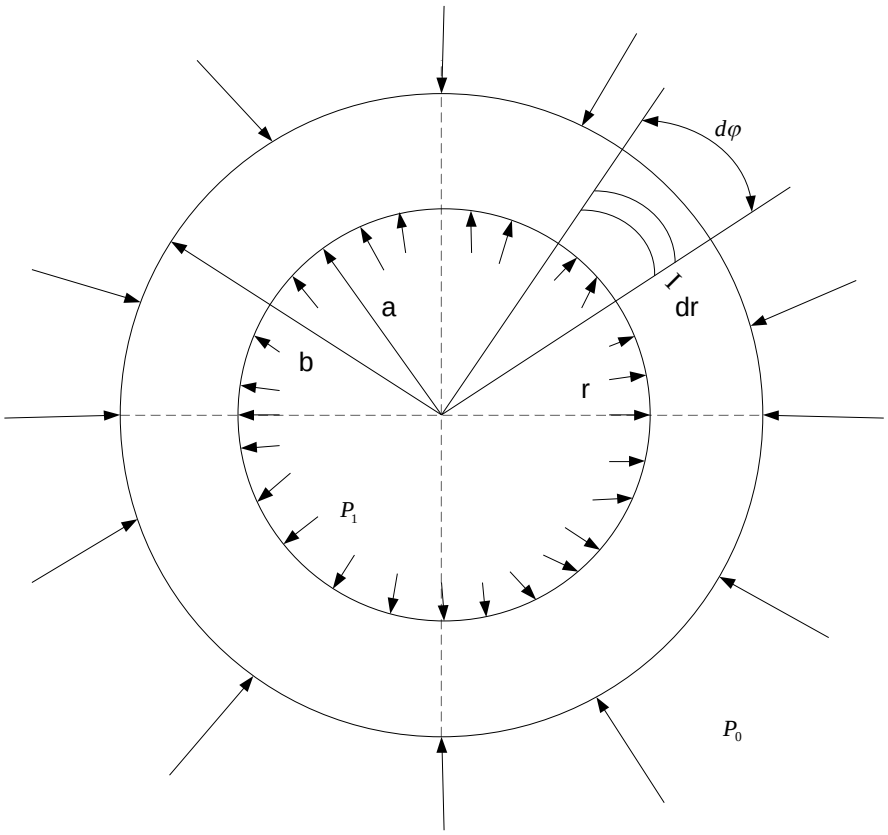
تمرین) یک سقف کروی مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر این سقف تحت تأثیر بار ناشی از وزن خودش قرار داشته باشد، تنش های محیطی و نصف النهاری را حساب کنید. شعاع کره را αو ضخامت آن را h و وزن واحد سطح آن را γ در نظر بگیرید.



تحلیل تنش الاستیک در مخازن استوانه ای جدار ضخیم:

در این قسمت هدف بدست آوردن رابطه ای است که توسط آنها تنش ها را در مخـازن اسـتوانه ای جدار ضخیم محاسبه کنیم. با توجه به آنچه در عمل اتفاق می افتد حالت کـرنش صـفحه ای را در نظر می گیریم. (در جهت طول استوانه از مقدار کرنش صرف نظر می کنیم)

$\varepsilon_z = 0$
$\sigma_z \neq 0$

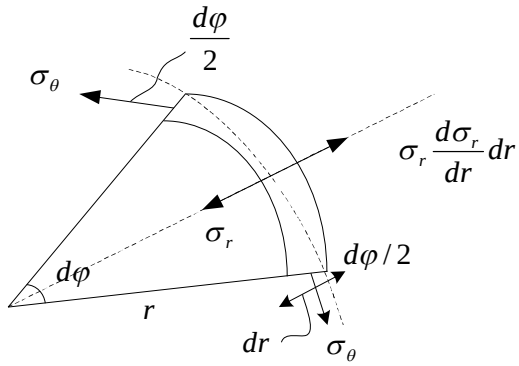


P_0 فشار خارجی

P_i فشار داخلی

عمق واحد z=1

(ضخامت واحد)



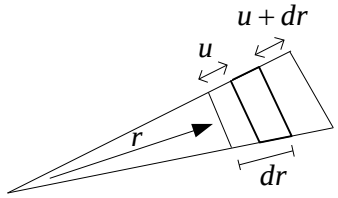
فرضیات $\begin{cases} drd\varphi \approx 0 \\ \sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2} \end{cases}$

$$+/\sum F_r = 0 \quad \rightarrow \sigma_r(rd\varphi \times 1) - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma r}{r} dr\right)(r+dr)\, d\varphi \times 1 + 2\sigma_\theta \times dr \times 1 \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

$$\rightarrow \sigma_\theta - \sigma_r - r\frac{d\sigma r}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (I)$$

روابط سازگاری و روابط کرنشی تغییر مکانی $\rightarrow \varepsilon_r = \frac{\left(u + \frac{du}{dr} dr\right) - u}{dr} = \frac{du}{dr}$ (الف)

u تغییر مکان شعاعی نقاط المان پس از المان فشار



کرنش محیطی $\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$ ب)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - v(\sigma_\theta + \sigma_z)] \qquad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_0 - v(\sigma_r + \sigma_z)] \qquad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - v(\sigma_r + \sigma_\theta)] = 0 \quad \Rightarrow \sigma_z = v(\sigma_r + \sigma_\theta) \qquad (1)$$

$$3,2,1 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[(1-v^2)\sigma_r - v(1+v)\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1-v^2)\sigma_\theta - v(1+v)\sigma_r] \end{cases}$$

$$\rightarrow \sigma_r = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta] \qquad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_r + v\varepsilon_r] \qquad (5)$$

5 الف و ب و 4 $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[v\frac{du}{dr} + (1-v)\frac{u}{r}\right] \\ \sigma_r = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\frac{du}{dr} + v\frac{u}{r}\right] \end{cases}$

(I) در 7 و 6 با جایگذاری $\rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$

انتگرال $\rightarrow u = A_1 r + \frac{A_2}{r}$ (8)

توجه کنید که شرایط مرزی این مسئله همان تنش ها (فشارهای P_i و P_0) هستند که روی سطوح داخلی و خارجی عمل می کنند، در این جا چون شرایط مرزی را بر حسب تغییر مکان نداریم باید

با u بدست آمده تنش ها را بدست آوریم سپس شرایط مرزی را به روابطی که بر حسب تنش ها هستند اعمال کنیم:

$$B.C\begin{cases} r=a & \sigma_r=-p_i \quad (ج) \\ r=b & \sigma_r=-p_0 \quad (د) \end{cases}$$ منفی چون تنش ها فشاری اند

از (8) $\rightarrow$ $\dfrac{du}{dr}=A_1-\dfrac{A_2}{r^2}$ (9)

در (9) و (6) و (7) $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_r=\dfrac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)(A_1-\dfrac{2A_2}{r})+\dfrac{v}{r}(A_1r+\dfrac{A_2}{r^2}\right] \quad (10) \\ \sigma_\theta=\dfrac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[v(A_1-\dfrac{2A_2}{r^2})+\dfrac{1-v}{r}(A_1r+\dfrac{A_2}{r^2}\right] \quad (11) \end{cases}$

در 10 و 11 (ج) و (د) $\Rightarrow \begin{cases} -P_i=\dfrac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[A_1-(1-2v)\dfrac{A_2}{a^2}\right] \\ -P_0=\dfrac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[A_1-(1-2v)\dfrac{A_2}{b^2}\right] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{(1+v)(1-2v)}{E}\cdot\dfrac{P_ia^2-P_0b^2}{b^2-a^2} \\ A_2=\dfrac{(1+v)}{E}\cdot\dfrac{(P_i-P_0)a^2b^2}{b^2-a^2} \end{cases}$$

پس :

$$\sigma_r=\frac{a^2P_i-b^2P_0}{b^2-a^2}\qquad \frac{(P_i-P_0)a^2b^2}{\gamma^2(b^2-a^2)}$$

$$\sigma_\theta=\frac{a^2P_i-b^2P_0}{b^2-a^2}\qquad \frac{(P_i-P_0)a^2b^2}{\gamma^2(b^2-a^2)}$$

معمولاً دو رابطه اصلی فوق را بصورت زیر می نویسند:

$$\sigma_i = c_1 - \frac{c_2}{r_2} \qquad \sigma_\theta = c_1 + \frac{c_2}{r_2}$$

$$c_1 = \frac{P_i a^2 - P_0 b^2}{b^2 - a^2} \quad , \quad c_2 = \frac{(P_i - P_0)a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

نتایج در مخازن مجرار ضخیم استوانه ای:

1) تنش های σ_r و σ_θ با r^2 شعاع استوانه رابطه ای معکوس و با P_i و P_0 رابطـه ی مسـتقیم دارند.

2) همیشه σ_r > σ_θ است و فقط در حالت $P_i = P_0 = -P$ داریم $\sigma_r = = -P\,\sigma_\theta$

3) $$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{(P_i - P_0)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2}$$

4) در حالـت خـاص کـه $P_0 b^2 = P_i a^2$ داریـم $\sigma_z = v(\sigma_\theta + \sigma_r)$ و مسـئله تبـدیل بـه تـنش صفحه ای می شود.

$$\delta_r = \frac{a^2 P_i - b^2 P_0}{b^2 - a^2} - \frac{(P_i - P_0)a^2 b^2}{\gamma^2 (b^2 - a^2)}$$ جدار ضخیم

$$\delta_r = \frac{P_i \gamma}{2t}$$ جدار نازک

$$\delta_\theta = \frac{P_i \gamma}{t}$$

ب) $P_i = 0 \quad , P_0 = 0$

$$\sigma_i = \frac{-P_0 b^2}{b^2 - a^2}\left(i - \frac{a^2}{r^2}\right) < 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{-P_0 b^2}{b^2 - a^2}\left(i + \frac{a^2}{r^2}\right) < 0$$

چون $\frac{a^2}{r^2} < 1 \;\rightarrow\; \sigma_r, \sigma_\theta < 0$

$$\sigma_r\int_{\min}=\sigma_r\int_{r=a}=0 \quad , \quad \sigma_r\int_{r=b}=-P_0=\sigma_r\int_{\max}$$

$$\sigma_\theta\int_{r=a}=\frac{-2P_ib^2}{b^2-a^2} \qquad , \qquad \sigma_\theta\int_{r=b}=\frac{-P_0(b^2+a^2)}{b^2-a^2}$$

توجه: در روابطی که گفتیم پس از محاسبه A_1 و A_2 تغییر مکان u نیز بصورت زیر بدست می آید:

$$u=A_1+\frac{A^2}{r^2}$$

تمرین) $\tau_{\max}$ را در حالت فوق (ب) محاسبه کنید؟

مثال) یک استوانه ی فولادی تحت فشار داخلی P_i=2400psi و P_0=0 قرار دارد. اگر:

قطر خارجی =2b=18 inch

قطر داخلی =2a=6 inch

=0.3 , E=30x10^{6}psi

مطلوبست:

الف) رسم توزیع تنش های σ_r و σ_θ

ب) $\tau_{\max}$

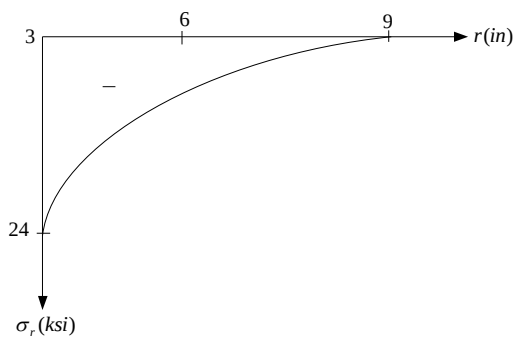
ج) تغییر مکان شعاع داخلی و خارجی u_i و u_0

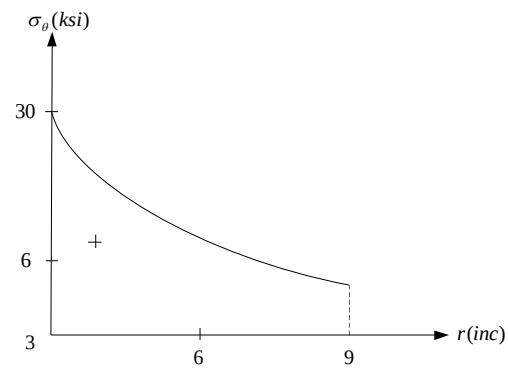
$$b=9 \;\; , \;\; a=3 \quad , P_i=24\,ksi$$

$$\sigma_r=\frac{P_ia^2}{b^2-a^2}(1-\frac{b^2}{a^2})=\frac{24(3)^2}{9^2-3^2}\;(1-\frac{9^2}{r^2})=3(1-\frac{81}{r^2})$$

$$\sigma_\theta=\frac{P_ia^2}{b^2-a^2}(1+\frac{b^2}{r^2})=3(1+\frac{81}{r^2}) \qquad 3\le r\le 9$$

r		$\sigma_r < 0$		$\sigma_\theta > 0$
$r = 3$	$\rightarrow$	$\sigma_r = 24$	$\rightarrow$	$\sigma_\theta = 30$
$r = 4$	$\rightarrow$	$\sigma_r = 12.2$	$\rightarrow$	$\sigma_\theta = 18.2$
$r = 5$	$\rightarrow$	$\sigma_r = 6.72$	$\rightarrow$	$\sigma_\theta = 12.7$
$r = 6$	$\rightarrow$	$\sigma_r = 3.75$	$\rightarrow$	$\sigma_\theta = 9.75$
$r = 9$	$\rightarrow$	$\sigma_r = 0$	$\rightarrow$	$\sigma_\theta = 6$





ب) $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \dfrac{30-(-24)}{2} = 27\,ksi$

ج) $A_1 = 5.2\times10^{-5}$

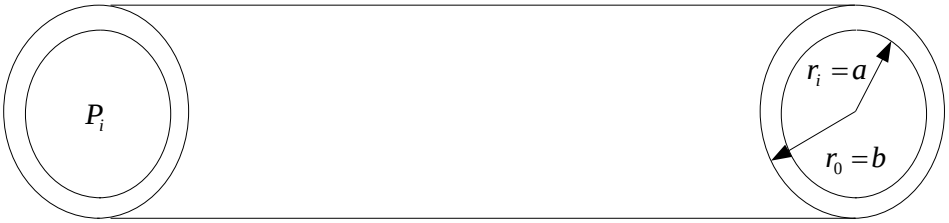
$A_2 = 4.05\times10^{-2}$

$$u = A_1 r + \frac{A_2}{r^2}$$

$u_i = u\Big|_{r=3} = 3.67\times10^{-3}\,in$

$u_0 = u\Big|_{r=9} = 1.64\times10^{-3}\,in$

تنش طولی در مخازن:



$$P_i \pi r_i^2 = \sigma_L \pi \left(r_0^2 - r_i^2\right) \quad \rightarrow$$
$$\sigma_L = \frac{P_i r_i^2}{r_0^2 - r_i^2}$$

روش انطباق جذب: shrink fit

این روش یک روش کاربردی در ساخت استوانه های جدار ضخیم تحت فشار بالا می باشد که در آن یکی از استوانه ها را توسط عملیات حرارتی داخل دیگری جا می زنند.

علمی ترین کاربرد آن ساخت لوله ی توپ و دیگر ادوات نظامی و ... می اشد.

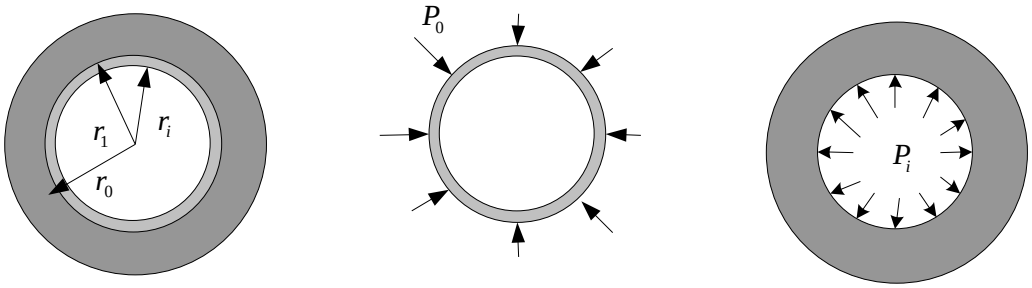
در عملیات انطباق جذب دو استوانه داریم. استوانه 1 دارای قطر خارجی بزرگتری از قطر داخلی استوانه 2 است و در حالت معمولی داخل آن نسبی بود. بنابراین در حالت معمولی 1 داخل 2 نمی رود.

بنابراین استوانه خارجی را حرارت داده و بعد از انبساط استوانه ی اول را داخل آن قرار می دهند. پس از تعادل حرارتی استوانه ای داخلی تحت فشار استوانه ی خارجی قرار می گیرد (در وضعیت انقباض در شرایط محیطی است) و استوانه ی خارجی تحت کشش محیطی (در حالت انبساط) قرار می گیرد.

در این بخش هدف محاسبه ی فشار ناشی از انقباض استوانه ی خارجی و همچنین توزیع تنش های σ_r و σ_θ در هر یک از استوانه ها می باشد.

چون در این روش استوانه ی داخلی تحت فشار خارجی ناشی از انطباق قرار می گیرد. ایـن امکـان را پیدا می کند تا فشار داخلی بیشتری را تحمل کند.

برای تعیین توزیع تنش ها و همچنین تعیین فشار P (فشار ناشی از انطباق) محاسبات زیر را انجام می دهیم



$r_i = a$, $r_0 = b$, $r_1 = c$ استوانه داخلی استوانه خارجی

$u = r\varepsilon_\theta$ (1) رابطه ی تغییر مکان شعاعی و کرنش که قبلاً داشتیم

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[(1-v^2)\sigma_\theta - \gamma(1+v)\sigma_r\right] \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow u = \frac{r}{E}\left[(1-v^2)\sigma_\theta - \gamma(1+v)\sigma_r\right] \qquad (3)$$

(الف)
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{a^2P_i - b^2P_0}{b^2-a^2} - \dfrac{(P_i-P_0)a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)} \\ \sigma_r = \dfrac{a^2P_i - b^2P_0}{b^2-a^2} + \dfrac{(P_i-P_0)a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)} \end{cases}$$

(الف) و (3) $\rightarrow u = \dfrac{1v}{E}\left[\dfrac{P_ia^2 - P_0b^2}{b^2-a^2}\right] + \dfrac{1+v}{E}\left[\dfrac{P_i-P_0}{b^2-a^2}\cdot\dfrac{a^2b^2}{\gamma}\right] \quad (I)$

برای استوانه داخلی: $P_i=0$, $P_0=P$, $b=c$

$$u_i\int_{r=c} = \frac{-Pc}{E}\left[\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}-v\right]=\delta_1 \qquad II$$

برای استوانه خارجی: $P_i=P$, $P_0=0$, $a=c$

$$u_i\int_{r=c} = \frac{-Pc}{E}\left[\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}+v\right]=\delta_2 \qquad III$$

δ_1 کاهش شعاع خارجی استوانه داخلی و δ_2 افزایش شعاع داخلی استوانه خارجی است.

پس : $|\delta|=|\delta_1|+|\delta_1|$

$$II, III \;\rightarrow\; \delta=\frac{Pc}{E}\left[\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}-v\right]+\frac{Pc}{E}\left[\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}+v\right]$$

$$\Rightarrow P=\frac{E\delta}{c}\left[\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{2c^2(b^2-a^2)}\right](IV)$$ فشار شرینگ نیست

بدین ترتیب با تعیین P (فشار انطباق) تنش ناشی از آن را در هر یک از 2 استوانه می توان حساب کرد که به این تنش ها، تنش های اولیه می گویند و روابط آن بصورت زیر است:

استوانه داخلی $P=P_0$, $b=c$

$$\sigma_r=\frac{-Pc^2}{c^2-a^2}(1-\frac{a^2}{r^2})$$
$$\sigma_\theta=\frac{-Pc^2}{c^2-a^2}(1+\frac{a^2}{r^2})$$

استوانه خارجی $P = P_i \quad , b = c$

$$\sigma_r = \frac{Pc^2}{b^2 - c^2}(1 - \frac{b^2}{r^2})$$
$$\sigma_\theta = \frac{Pc^2}{b^2 - c^2}(1 + \frac{b^2}{r^2})$$

چنانچه استوانه ی داخلی یک میله ی کاملاً تو پر باشد فشار انطباق در رابطه IV با قرار دادن a=0 برابرمی شود با:

$$P = \frac{\delta E}{c}\left(\frac{b^2 - c^2}{2b^2}\right)$$

اگر جنس ها متفاوت بود E_1 و E_2 بوجود می آمد.

مثال) یک استوانه ی جدار ضخیم فولادی ساخته شده از دو استوانه به شعاعهای $r_i=a=8''$ ، $r_1=c=12''$ و $b=r_0=16''$ می باشد.

اگر این استوانه با $\delta = 0.006''$ ساخته شده باشد مطلوبست توزیع تنش های نهایی؟

از داخلی بعد $E = 30\times10^6\ psi, p_i = 15\,ksi$

(بدست آوردن تنش های محیطی در اثر این فشار داخلی و فشار شرینگ نیست را در جداره استوانه)

$$P = \frac{\delta E}{c}\left[\frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{2c^2(b^2 - a^2)}\right] = 0.006.\frac{30\times10^6}{12}\left[\frac{(12^2 - 8^2)(16^2 - 12^2)}{2(12)^2(16^2 - 8^2)}\right] = 2430\ psi$$

محاسبه تنش های محیطی ناشی از انطباق در استوانه داخلی:

$$\sigma_\theta \int_{r=\gamma} = \frac{-Pc^2}{c^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{-2430(12)^2}{12^2-8^2}\left(1+\frac{8^2}{8^2}\right) = -8748\,psi$$

$$\sigma_\theta \int_{r=12} = -6318\,psi$$

تنش ناشی از انطباق در استوانه خارجی که تحت فشار داخلی p=2430 قرار گرفته:

$$\sigma_\theta \int_{r=12} = \frac{Pc^2}{b^2-c^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{2430(12)^2}{16^2-12^2}\left(1+\frac{16^2}{12^2}\right) = 8748\,psi$$

$$\sigma_\theta \int_{r=16} = 6248\,psi$$

حال تنش های ناشی از فشار داخلی Pi=15 ksi را در استوانه به شعاع داخلی 8 و b=16 حساب می کنیم و در پایان تنش ها را با تنش های فوق جمع می کنیم.

$$\sigma_r \int_{r=8} = \frac{a^2P_i}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) = 15000\,psi$$

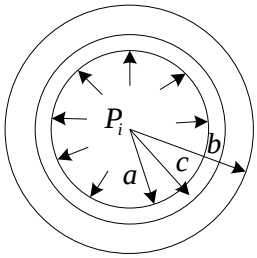
$$\sigma_\theta \int_{r=8} = \frac{a^2p}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) = \frac{8^2(15000)}{16^2-8^2}\left(1+\frac{16^2}{8^2}\right) = 25000\,psi$$

$$\sigma_\theta \int_{r=12} = 13889\,psi$$

$$\sigma_\theta \int_{r=16} = 10000\,psi$$

استوانه داخلی
$$\begin{cases} \sigma_\theta \int_{r=8} = 25000-8748 = 16252 \\ \sigma_\theta \int_{r=12} = 13889-6318 = 7571 \end{cases}$$

استوانه خارجی $\begin{cases} \sigma_\theta \int_{r=12} & = 13887 + 8687 = 22567 \\ \sigma_\theta \int_{r=16} & = 10000 + 6248 = 16248 \end{cases}$



$a = 8''$

$b = 16''$

$c = 12''$

$P_i = 15\,ksi$

www.aqbmechanic.vcp.ir
www.teach.sub.ir